

Capítulo xx

La cámara digital como instrumento de medición en el laboratorio

Las cámaras digitales y los equipos de captura de vídeo pueden utilizarse como instrumentos de medición en el laboratorio. Aquí proponemos varios experimentos sencillos que hacen uso de una cámara digital y que permiten contrastar sus resultados con modelos teóricos pertinentes. En particular estudiaremos las formas geométricas de las sombras que una lámpara produce sobre una pared y la forma de un chorro de agua que sale de una manguera. En todos estos casos la imagen o fotograma, obtenida con una cámara digital, puede servir para estudiar estos fenómenos. También proponemos analizar la cinemática de un cuerpo en una y dos dimensiones, más específicamente los casos de caída libre y de tiro oblicuo. En estos dos últimos casos utilizamos una cámara digital en modo video. En capítulos posteriores utilizaremos las técnicas desarrolladas aquí para estudiar otros fenómenos físicos.

Introducción

Una imagen digital está formada por una matriz de “puntos” o celdas elementales. Cada celda se denomina píxel (de la contracción de las palabras *picture* y *element*) y es la unidad más pequeña de una imagen digital. Cada píxel (px) tiene almacenado un número que representa su color. Si solo tiene un bit (o sea 0 o 1), podemos formar imágenes en blanco y negro como se ilustra en la Figura xx.1. El color de cada píxel también puede codificarse con un número de 8 bits (byte) que admite $2^8 = 254$ variaciones de colores. De modo similar, hay imágenes en las que en cada píxel puede tener 3 bytes de colores (24 bits) o sea puede tener $2^{24} = 16777216$ opciones de color, etc. Al aumentar el número de colores por píxel, aumentan los matices que una imagen puede tener, pero también aumenta su tamaño o sea el espacio que ocupa la imagen en bytes.

Objetivos

- ✓ Las cámaras digitales como instrumentos de medición
- ✓ Estudio de las formas de sombras
- ✓ Formas de las trayectorias de chorros de agua
- ✓ Fuerza de roce del aire
- ✓ Estudio del tiro oblicuo sin roce
- ✓ Tiro oblicuo con roce

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura xx.1 Imagen digital de 10x11 píxeles, monocromático, cada píxel almacena 1 bit, 1= blanco, 0=negro.

La resolución de la imagen digital depende del número de píxeles en la misma. Una imagen de 480 x 640 píxeles equivale a 307200 píxeles ($\approx 307 \text{ kpx}$). Una imagen digital de 2048 x 1536 = 3145728 equivale a una resolución de 3.1 *Mpx*, esta notación es muy usual en la especificaciones de las cámaras digitales. Lógicamente, al aumentar la resolución de la imagen y la cantidad de colores por píxel, mayor será calidad del fotograma y mayor el espacio que ocupa la misma. En realidad, esta descripción somera se aplica a los archivos digitales tipo *BMP*. Hay asimismo muchos otros formatos comprimidos, que permiten almacenar mucha información en archivos más pequeños, como los formatos *jpg*, *tif*, etc, que siguen protocolos distintos a los mencionados más arriba, pero equivalentes a éstos.

Los píxeles en una imagen digital pueden observarse fácilmente ampliando suficientemente la imagen usando la opción *zoom*. Los píxeles aparecen como pequeños cuadrados de color, o en blanco y negro, o en matices de grises. Las imágenes se forman como una matriz rectangular de píxeles. El origen de las coordenadas de los píxeles es en general coincide con el extremo superior izquierdo del fotograma, como se ilustra en la Figura xx.2. Las coordenadas en píxeles de un fotograma se pueden leer usando casi cualquier programa de visualización de imágenes, tales como PhotEd@Microsoft, Paint@Microsoft o Corel Draw@Corel, entre otros. Las coordenadas de la posición del mouse puede leerse en estos programas como una dupla de números en la parte inferior de la imagen. De este modo, colocando el mouse en el extremo inferior derecho de la imagen, puede obtenerse la resolución en píxeles de la imagen que tenemos.

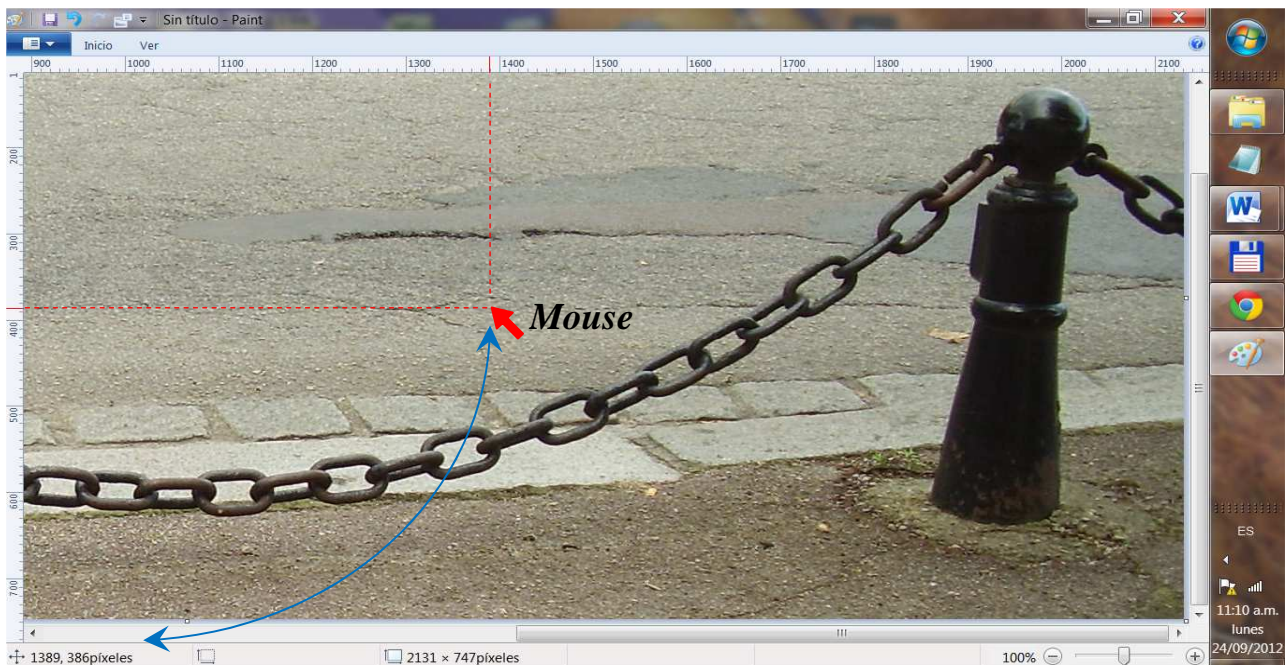


Figura xx.2 Foto digital de una cadena. La altura real en metros del poste, permite transformar las coordenadas en píxeles de la foto dimensiones métricas. Cada punto de una foto digital (tal como en punto indicado por la flecha) tiene una coordenada en píxeles bien definida que se indica en la parte inferior

derecha de la imagen (1389, 386). En la parte inferior se aprecia el tamaño de la imagen en píxeles (2131x747).

Los experimentos propuestos aquí pueden ser realizados con una cámara digital comercial común (con una resolución de 480 x 640 píxeles o mejor) o bien una WebCam. Igualmente, una cámara digital con capacidad de video o un camcorder con una resolución de 480 x 640 píxeles y que pueda registrar al menos 25 cuadros por segundo (25 fps; fps = *frames per second*), puede ser adecuada para estudiar la cinemática de objetos en dos dimensiones.

Si se observa una imagen digital en una computadora usando algún programa de visualización de imágenes, se pueden obtener las coordenadas en píxeles de la posición del puntero del “mouse”,^{1,2,3,4} como se ilustra en la Figura xx.2. Si en la imagen se introduce un objeto de dimensión conocida, es posible transformar las coordenadas en píxeles a coordenadas convencionales, es decir en *mm*, *cm*, *m*, etc. Desde luego, este procedimiento se puede realizarse de modo artesanal, anotando las coordenadas en píxeles del objeto a medir, y luego utilizando las coordenadas en píxeles del objeto introducido en el fotograma como referencia de calibración. Afortunadamente, existen múltiples programas que permiten transformar las coordenadas en píxeles a unidades estándares de longitud, de modo muy simple. Una vez realizado el proceso de “calibración” de la foto digital, se puede obtener las coordenadas de cualquier objeto del fotograma en coordenadas reales. Algunos programas que pueden hacer esta operación son: xyExtract Graph Digitizer,⁵ Data Point,⁶ Tracker,⁷ LoggerPro de la empresa Vernier,⁸ Physics ToolKit,⁹ etc.

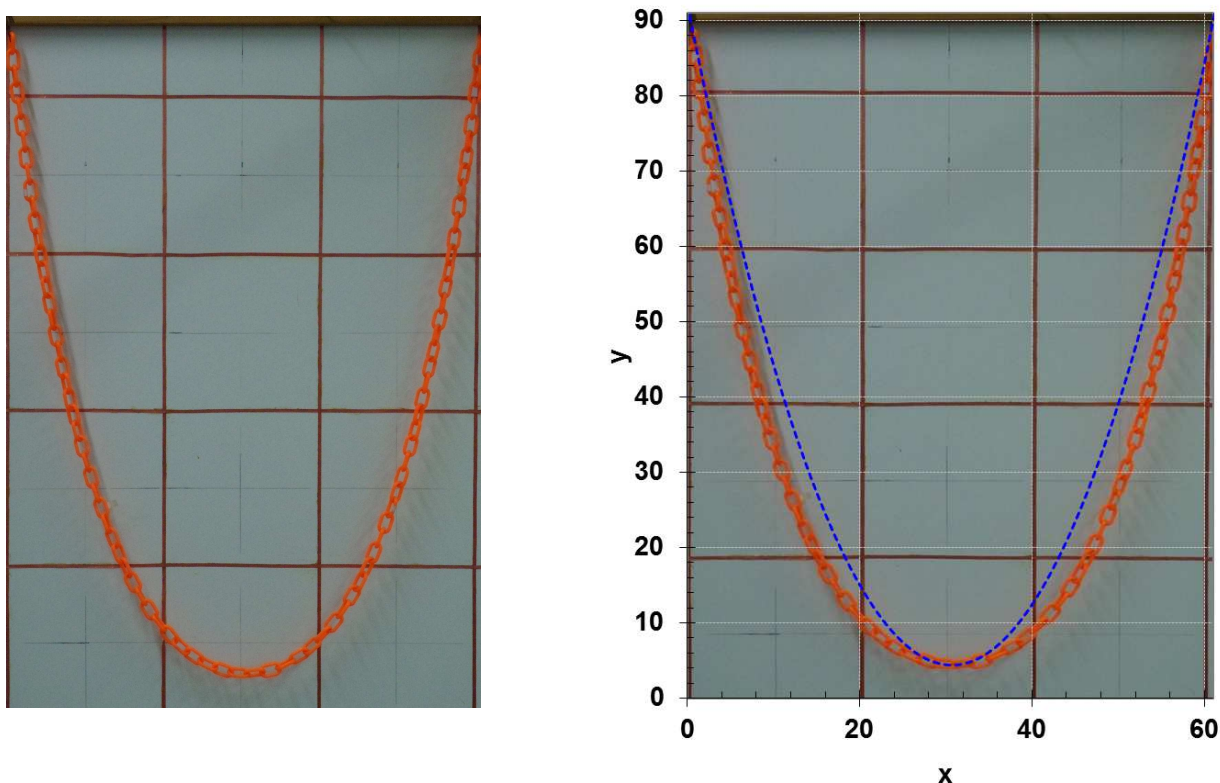


Figura xx.3. A la izquierda se ve la imagen de una cadena colgada. Se colocó un reticulado de 0,2mx 0,2m en el fondo. Este reticulado sirve para “calibrar” las dimensiones de la foto. Asimismo este retículo permite recortar el fotograma de modo que el mismo tenga dimensiones conocidas, 0,6 m x 0,9 m en este caso. En la

imagen de la derecha vemos como el fotograma fue incorporado en el fondo de un gráfico estándar de una hoja de cálculos. La grilla en líneas de punto y la curva en línea de trazos pertenecen al gráfico de la hoja de cálculo y pueden compararse fácilmente con la imagen la cadena.

Otra alternativa para estudiar cuantitativamente un fenómeno registrado en una foto digital consiste en recortar el fotograma en dimensiones reales bien conocidas. Esto puede lograrse colocando un reticulado en el fondo de la foto como se ilustra en la Figura xx.3. Este reticulado permite recortar la imagen en un tamaño de dimensiones conocidas. Cuando la imagen así recortada, se introduce como el fondo en el área de trazado del gráfico de una hoja de cálculo y las dimensiones de las coordenadas del gráfico se eligen de modo que coincidan con las dimensiones reales de la foto, como se ve en Figura xx.3; así automáticamente la imagen queda calibrada en unidades estándares. De este modo se pueden trazar curvas teóricas que se pueden comparar y sobreponer al fenómeno registrado en la foto. Esta técnica se utiliza en muchos trabajos^{2,3,4} y algunos ejemplos de los mismos están disponibles en Internet.^{¡Error! Marcador no definido.}

Las imágenes digitales son particularmente útiles para estudiar fenómenos en que las características más significativas del problema están contenidas en un plano, por ejemplo la forma de la sombra o la forma de la trayectoria de un chorro de agua o la forma de una cadena colgada, como se muestra en la Figura xx.3.

Para evitar posibles distorsiones producidas por la perspectiva de una foto, es deseable y aconsejable que el fenómeno u objeto en estudio esté contenido en un plano. Asimismo, el objeto o escala que se utilizará como calibración debe estar en este mismo plano o muy cerca de él. Es conveniente que la cámara se ubique sobre una línea perpendicular al plano principal de la imagen y que pasa cerca de centro de la misma. Desde luego, el plano principal en estudio y el plano de la lente deben estar lo más paralelos posibles para evitar efectos de distorsión por perspectiva. También se sugiere que la distancia al objeto a fotografiar sea mayor que las dimensiones del mismo.

En el caso de un proyectil que se mueve, por ejemplo una pelota o un globo, es conveniente utilizar la cámara digital en modo video (o bien emplear un camcorder o WebCam). En el caso de video digital, cada fotograma del video es una imagen digital que puede tratarse como se discutió más arriba. Como los fotogramas de un video se obtienen a intervalos fijos de tiempo, por ejemplo a 25 o 30 cuadros por segundo-cada fotograma contiene además de las coordenadas (x, y) del cuadro, el tiempo. En otras palabras, del video es posible reconstruir la trayectoria de un móvil. De nuevo, en este caso existen múltiples programas que facilitan notablemente esta tarea.^{6,7,8,9} En general, cada software de análisis de imágenes digitales o videos contiene un tutorial que describe su funcionamiento. Asimismo, hay cámaras que permiten regular el tiempo entre cuadro y cuadro o sea el *ftp*. Algunos modelos de cámaras permiten conectar un “*intervalometro*” o disparador automático, que es un dispositivo externo que regula el tiempo y duración de cada fotograma. Así es posible programar por ejemplo 10 disparos por hora de una cierta duración cada una.

Formas geométricas formadas por la sombra de una lámpara

Las sombras que una lámpara proyecta sobre una pared o pantalla pueden presentar patrones regulares e interesantes de estudiar, como se ilustra en la Figura xx.2. La luz que emerge de una lámpara forma un cono, con el vértice en la posición del filamento de la bombilla y una abertura angular definida por el borde de la pantalla de la lámpara. Dependiendo de la orientación del eje del cono de luz respecto a la pared esperamos observar una sombra con formas de cónicas: hipérbolas,

parábolas o de otro tipo. Mediante el uso de una fotografía digital es simple someter a prueba experimental esta expectativa.¹⁰

Una vez que se conocen las coordenadas de la sombra, es fácil comparar los resultados de la sombra observada con las predicciones teóricas correspondientes. En la Figura xx.2 se muestra el caso en que el eje del cono es paralelo a la pared. En este caso esperamos que la sombra forme una hipérbola de ecuación:

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1 \quad (\text{xx.1})$$

donde (x_0, y_0) son las coordenadas del centro u origen de la hipérbola (coincidente con el filamento de la bombilla), a y b son las semilongitudes de los eje mayores y menores de la hipérbola respectivamente. Los parámetros ajustables del modelo son: x_0 , y_0 , a y b . Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$\frac{(y - y_0)}{b} \pm \frac{(x - x_0)}{a} = 0 . \quad (\text{xx.2})$$

También se puede analizar qué pasa si la generatriz del cono de luz es paralela a la pared. Podemos crear esta condición inclinando la lámpara para que el borde de la sombra en el techo esté justo encima de la lámpara. En este caso, la forma de la sombra en la pared sería parabólica:

$$y - y_0 = c \cdot (x - x_0)^2 + k , \quad (\text{xx.3})$$

donde (x_0, y_0) son las coordenadas del vértice de la parábola c y k dos constantes características de la misma y son los parámetros ajustables del modelo .

Proyecto 16. Estudio de la sombra de una lámpara

Equipamiento básico recomendado: Una cámara digital de 480x640 píxeles de resolución o mejor. Una lámpara junto a una pared o pantalla.

Coloque la lámpara junto a la pared o pantalla, asegurándose que proyecte una sombra nítida. Ubique en la pared o pantalla algún objeto de tamaño conocido (regla graduada) y asegúrese que el eje del cono de luz arrojado por la lámpara sea lo más vertical posible. De ser posible use un trípode para tomar las fotos, o hágalo manteniendo la cámara quieta y cuide las líneas verticales se mantengan como tales en la foto.

Sugerencias de trabajo:

- ✓ Con estas precauciones evalúe si las figuras proyectadas por las sombras pueden ser explicadas por formas cuadráticas o cónicas.
- ✓ Dibuje los datos observados de la sombra con las expectativas teóricas en un mismo gráfico y evalúe si las expectativas teóricas se cumplen. ¿Qué puede concluir de su análisis?

Proyecto 17. Trayectoria de un chorro de agua

Una forma de describir la forma de un chorro de agua, como el de la Figura xx.2, consiste en suponer que las partículas de agua siguen la misma trayectoria que un proyectil sólido. Este último problema tiene una solución simple que se discute en la mayoría de los textos de física básica.^{11, 12} Las ecuaciones horarias para las coordenadas x (horizontal) e y (vertical) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta_0 \cdot t \\y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2\end{aligned}\quad (\text{xx.4})$$

donde (x_0, y_0) son las coordenadas del móvil a $t = 0$, v_0 es el módulo de la velocidad inicial de proyectil disparado (chorro de agua) que forma un ángulo θ_0 con la horizontal (eje x). Eliminando el tiempo t de las Ecs. (xx.4) obtenemos la expresión de la trayectoria:

$$y(x) = y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} (x - x_0)^2 \quad . \quad (\text{xx.5})$$

Esta expresión teórica puede compararse directamente con la trayectoria real de chorro de agua registrada en la foto digital.³

Equipamiento recomendado: una manguera conectada a un grifo de agua, con una boquilla que permita elegir un ángulo de salida bien definido del chorro y un fondo con una escala nítida y clara cerca del plano del chorro de agua. Una cámara digital de 480 x 640 píxeles de resolución o mejor.

Elija las condiciones de iluminación (artificial o natural) que hagan claramente visible el chorro de agua en la imagen digital al igual que la escala de referencia. Seleccione con el grifo, un caudal de agua de modo que toda la trayectoria del chorro entre en la imagen de la fotografía para distintos ángulos de salida. Una vez elegida la regulación del grifo, mantenga la misma para todas las tomas.

Sugerencias de trabajo:

- ✓ Fotografié el chorro de agua para distintos ángulos de salida, θ_0 , manteniendo, en lo posible, constante el flujo (y velocidad v_0) de salida del chorro.
- ✓ Usando algún programa de análisis gráfico (por ejemplo XYExtract,⁵ o el método de introducir una imagen de dimensiones conocidas dentro del área gráfica de una figura) compare la forma del chorro de agua con las expectativas teóricas, Ec.(xx.5). Para ello utilice como parámetros de ajuste o variables a: θ_0 , v_0 , x_0 e y_0 , tratando de lograr el mejor ajuste posible. Realice esta operación para todos los ángulos estudiados. En Recursos de Experimentos de Física de www.fisicarecreativa.com¹¹ se pueden encontrar ejemplos de como realizar estas manipulaciones con hojas de cálculo.
- ✓ Para estimar en forma independiente el valor de v_0 , utilizando un balde de unos 5 litros aproximadamente, mida el tiempo que tarde en llenarlo. Pese el balde antes y después del llenado y determine el volumen de agua cargado. Usando el tiempo medido para cargarlo, determine el flujo de agua saliente, Q_0 . Estime al área de la

boquilla de la manguera. Con este dato obtenga un valor aproximado de $v_0 = Q_0/A_0$ y compare con el valor obtenido de los ajustes de los chorros de agua.

- ✓ Una de las hipótesis realizadas para analizar estos datos consistió en suponer que las gotas de agua y el chorro de agua siguen las mismas leyes que los objetos materiales sólidos (partículas). En base a sus observaciones, ¿qué puede concluir de esta hipótesis?

Proyecto 18. ♣ Uso de video para estudiar la cinemática de un cuerpo - fuerza de roce viscoso en el aire

Nuestro objetivo en esta actividad es estudiar las características de la fuerza de roce con el aire ejercida sobre distintos objetos. La fuerza de roce o resistencia del aire en objetos que caen es importante porque es parte de nuestra experiencia diaria. Las hojas de los árboles o las gotas de lluvia no parecen tener aceleración al caer, ni los globos inflados con aire,^{13, 14} etc. En este experimento proponemos usar globos inflados con aire, como los que se usan en las fiestas, con pesos (por ejemplo clips) atados a ellos. También se pueden usar filtros de café, de papel, tipo canasta, apilados. Al variar el número de filtros, su peso varía pero la sección transversal se mantiene constante.^{15,16}

Consideraciones teóricas: Cuando un objeto cae, las fuerzas ejercidas sobre el mismo son: el empuje del aire (E), la fuerza de rozamiento con el aire (F_{roce}) y su peso (P). Si utilizamos un sistema de referencia positivo orientado hacia abajo, de la segunda ley de Newton, tenemos:

$$P - E - F_{roce}(v) = m \frac{dv}{dt} \quad , \quad (xx.6)$$

definimos el *peso efectivo* del objeto como $P_{ef} = P - E = m.g$. Aquí m es la masa efectiva de globo, cuyo valor es el que mide directamente una balanza cuando el globo está inflado.

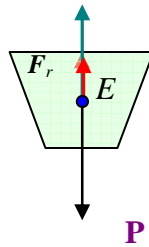


Figura xx.4. Diagrama de cuerpo libre de un filtro de café cuando cae en el aire.

Nuestra hipótesis consiste en suponer que la fuerza de roce depende de la velocidad v elevada a una potencia n desconocida, es decir $F_{roce} \propto v^n$. De la expresión (xx.6) se ve que, al acelerarse el cuerpo, la fuerza de roce aumenta hasta que iguala el peso efectivo. A partir de ese momento, el objeto se mueve con velocidad constante, o sea alcanza una velocidad límite v_{fin} . Según la Ec. (xx.6) tenemos:

$$F_{roce}(v) = k \cdot v_{fin}^n = P_{ef} = m \cdot g, \quad (xx.7)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Como los filtros de café pueden acumularse unos dentro de otros, es posible variar el peso efectivo sin modificar significativamente la forma. Lo mismo sucede con un globo al que se le varíen el número de clips que se le cuelgan. Midiendo v_{fin} para distintos grupos de filtros (varios P_{ef}) y graficando P_{ef} en función de v_{fin} , es posible verificar si la expresión (xx.7) se cumple, y de esos gráficos obtener n .

Experimento

Equipamiento recomendado: un conjunto de filtros de café, tipo canasta, o un globo de fiestas con un conjunto de clips que se usan para variar el peso del mismo. Una cámara digital que grabe videos de 480x640 píxeles de resolución o mejor o un camcorde, con alrededor de 25 fps.

El método experimental propuesto hace uso de una cámara digital en modo vídeo o camcorde. Para obtener una calibración de los píxeles a escala real se puede usar algún objeto de dimensiones conocidas en un lugar próximo a la línea de caída de los cuerpos (filtros o globos). Tanto en el caso de los filtros o globos cargados, se deben pesar (medir P_{ef}) estos objetos antes de cada tirada o ensayo.

El análisis de los videos se puede realizar con cualquier software de análisis de videos, como ser: Data Point,⁶ Physics ToolKit,⁹ Logger Pro® Vernier Software,⁸ Tracker,⁷ etc. Con alguno de estos programa se pueden obtener las coordenadas de posición y en cada instante de tiempo o sea la tripla (t,x,y) . En todos los casos, se debe evitar corrientes de aires, para que $x \approx constante$.

Los valores de (t,x,y) se usan para construir gráficos de y y v_y en función del tiempo t . En general, es de esperar gráficos de y en función de t de la forma indicada en la Figura xx.5. Después de cierto tiempo, se espera una tendencia lineal indicativa de que se alcanzó una velocidad límite. A partir de esta pendiente podemos obtenemos el valor de v_{fin} para los distintos pesos.

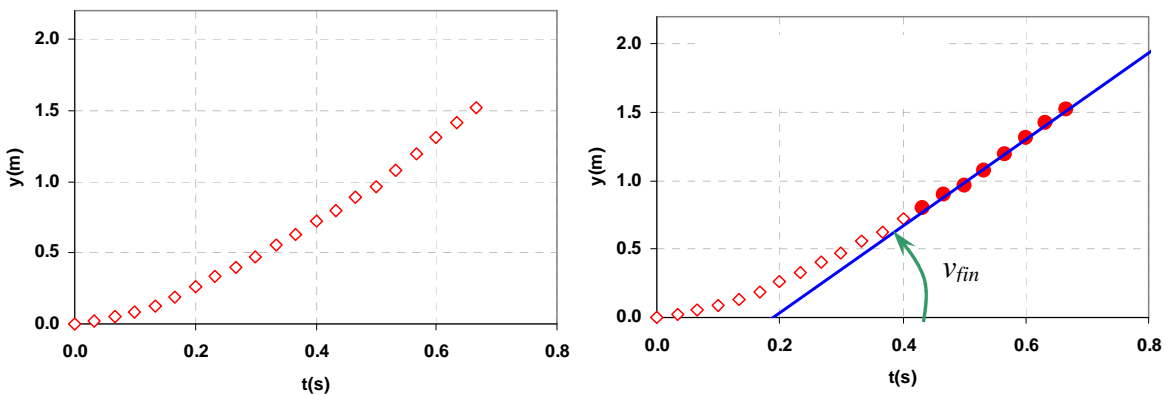


Figura xx.5. Gráfico de y en función de tiempo t . Después cierto tiempo, los datos muestran un comportamiento lineal, indicando que se alcanzó una velocidad límite. De la pendiente en esta zona podemos obtener v_{fin} .

Una vez obtenidas las velocidades límites v_{fin} para los diferentes pesos P_{ef} , se propone graficar P_{ef} en función de v_{fin} . Si este último gráfico, en escala log-log se linealiza, esto indica que la relación entre estas magnitudes es de tipo potencial, corroborando la hipótesis expresada en la Ec.(xx.7). Del ajuste de estos datos podemos obtener los parámetros k y n de la misma, siguiendo el procedimiento discutido en el Cap. 2. La incertidumbre del exponente n se puede calcular graficando $\log(P_{ef})$ en función de $\log(v_{fin})$. El valor de n indica a su vez el tipo de movimiento que tiene el cuerpo que cae.

El número de Reynolds se define como:¹⁴

$$Re = \frac{\rho_{medio} \cdot v \cdot d}{\eta_{medio}} \quad (xx.8)$$

donde ρ_{medio} es la densidad del medio (aire), η_{medio} su viscosidad, v es la velocidad del objeto y d representa su dimensión característica, en nuestro caso el diámetro de los globos o filtros de café. Si $Re < 2000$ el movimiento del fluido alrededor del objeto sigue un régimen laminar y se espera que la fuerza de roce sea proporcional a la velocidad. Si $Re > 4000$ el movimiento del fluido alrededor del objeto sigue un régimen turbulento y se espera que la fuerza de roce sea proporcional al cuadrado de la velocidad. En el Anexo A se presenta un argumento heurístico que justifica este último resultado. En el Anexo B se resuelve la ecuación de movimiento de un cuerpo que cae en un medio con roce de tipo turbulento.

Sugerencias de trabajo:

- ✓ Filme la caída del objeto seleccionado con los diferentes pesos.
- ✓ Para cada peso, P_{ef} , obtenga la velocidad límite v_{fin} .
- ✓ Del gráfico de la velocidad límite v_{fin} en función de P_{ef} obtenga los parámetros de la expresión (xx.7), es decir k y n . En particular, de ser posible estime n con su correspondiente error.
- ✓ Discuta la dependencia de la fuerza de roce con la velocidad límite. ¿Qué expresión sigue esta fuerza como función de la velocidad?
- ✓ Calcule el valor de Re cuando el cuerpo alcanza la velocidad límite y compare los resultados obtenidos con lo esperado según sea el movimiento del fluido alrededor del objeto. ¿Conque tipo de régimen (laminar o turbulento) se mueve su objeto en el aire?
- ✓ **Opcional:** Usando la expresión teórica de y en función de t , discutida en el Anexo B, compare sus resultados experimentales con los obtenidos teóricamente. ¿Explica el modelo propuesto, Ec.(xx.30) los resultados de $y(t)$?

Proyecto 19. ♣ Estudio de la cinemática del tiro oblicuo

En esta actividad nos proponemos utilizar una cámara digital en modo video para estudiar la cinemática de un cuerpo en movimiento bidimensional. En particular estudiamos el caso de un tiro oblicuo en dos situaciones diferentes: la primera, cuando los efectos de roce con el aire son despreciables y la segunda, cuando dicho efecto es relevante. En el primer caso el planteo del problema es simple y el modelo teórico es el mismo que se describió en la actividad anterior. El análisis del segundo caso – cuando los efectos de roce son importantes – implica integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento, por lo tanto presenta un desafío mayor.

Para disparar los proyectiles, puede construirse un lanzador de proyectiles como el que se ilustra en la Figura xx.6 o algún dispositivo que sirva para este fin. El dispositivo de la Figura xx.6 está formado por dos tubos, uno dentro de otro. El de mayor diámetro tiene un pequeño tajo transversal por donde pasa una banda elástica a fin de sostener la pelota antes del disparo. Otra banda elástica, hace que el segundo tubo, que funciona como émbolo, golpee la pelota al soltarlo.

Se filma el lanzamiento y observando el video cuadro a cuadro podemos medir la posición (x,y) del objeto en función del tiempo. Nuestro objetivo es obtener para cada lanzamiento, las ecuaciones horarias experimentales $x(t)$ y $y(t)$, como así también la determinación experimental de la trayectoria, $y(x)$.

En el primer caso (roce despreciable) se puede utilizar una esfera de madera de 1 a 2 cm de diámetro o bien la esfera que tienen algunos desodorante “roll-on”. El segundo proyectil puede ser una pelotita de tenis de mesa (ping pong). La diferencia fundamental entre estos dos proyectiles es su masa y, consecuentemente, sus energías cinéticas iniciales. La magnitud de estas energías iniciales comparadas con las pérdidas de energía con el aire determina el tipo de trayectoria de cada cuerpo. En el caso de la bolilla de madera o el “roll-on”, las pérdidas de energía por roce con el aire son en general despreciables frente a la energía cinética inicial. En el caso de la pelotita de tenis de mesa ocurre lo contrario. Puede observarse experimentalmente que en el lanzamiento de la bolilla de madera, con un alcance aproximado de 1.50 m, su movimiento puede estudiarse considerando despreciable los efectos del rozamiento con el aire, ya que su trayectoria se describe muy bien por una parábola, Ec.(xx.5). En cambio, al lanzar una pelota liviana de tenis de mesa con un alcance de aproximadamente unos 4 m, es necesario incluir los efectos del rozamiento para describir adecuadamente su trayectoria, ya que esta vez la trayectoria no es simétrica y no se puede describir por una parábola.

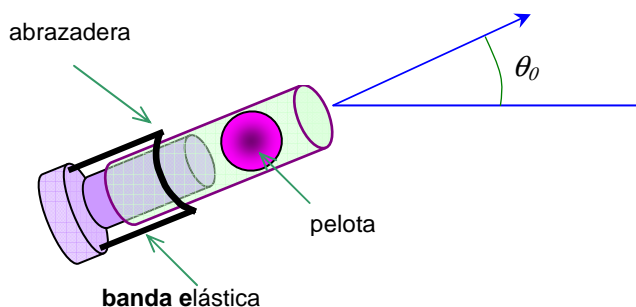


Figura xx.6. Esquema del disparador de proyectiles. El tubo usado es un trozo de caño de desagüe de 2". Un émbolo de madera, sujeto a la base con una banda elástica, impulsa la pelota que se lanza.

Cuando la fuerza de roce con el aire es importante, la descripción teórica del movimiento se realiza través de la resolución numérica de integrales que no tienen solución analítica sencilla. La solución consiste en integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento para pequeños intervalos de tiempo, como se indica más adelante.

Experimento 1: Caso de roce despreciable: En este caso se sugiere filmar el lanzamiento de proyectiles, para distintos ángulos θ_0 .

Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine de la trayectoria experimental: $y(x)$.
- ✓ En un mismo gráfico, dibuje los datos experimentales de la trayectoria y las expectativas teóricas, Ec.(xx.5). Variando los valores de los parámetros de la expresión teórica, θ_0 , v_0 , x_0 e y_0 , trate de lograr el mejor ajuste posible. Realice esta operación para todos los ángulos estudiados.
- ✓ Obtenga las ecuaciones horarias experimentales $x(t)$ y $y(t)$. Grafique sus resultados, incluyendo en la misma figura las expectativas teóricas, Ec.(xx.5) con los parámetros encontrados previamente.
- ✓ ¿Qué puede concluir acerca del modelo teórico propuesto para explicar sus datos.

♣ **Experimento 2: Caso de roce apreciable:** cuando la fuerza de roce con el aire es importante y no puede despreciarse, en general no es posible encontrar una expresión analítica para la trayectoria del cuerpo.

Integración numérica de las ecuaciones de movimiento: cuando el objeto que se mueve en el seno de un fluido, la fuerza de roce o arrastre que tiene una dirección opuesta a la velocidad. La característica de esta fuerza de arrastre depende de la forma de objeto y del régimen en el que se mueve a través del medio. A bajas velocidades, el régimen del movimiento del fluido es laminar y la fuerza de arrastre está dominada por los efectos viscosos que es proporcional a la velocidad del objeto. A mayores velocidades,^{14,15,16} el régimen de movimiento del fluido es turbulento y la fuerza de arrastre está dominada por efectos inerciales. En este caso la dependencia de esta fuerza es cuadrática en la velocidad. Si R_e es menor que 2000 el flujo alrededor del objeto es esencialmente laminar y la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad, esto es:

$$F_r = k_L v . \quad (\text{xx.9})$$

La magnitud k_L depende del tamaño y forma del objeto y de la viscosidad del fluido. En particular si el objeto es esférico y $R_e \leq 1$ la fuerza de roce está dada por la fórmula de Stokes:

$$F_r = 6\pi r\eta v . \quad (\text{xx.10})$$

A números de Reynolds altos, $R_e > 4000$, el régimen de fluido es turbulento, en estos casos una aproximación razonable de la fuerza de rozamiento o arrastre viene dada por:^{14,15,16}

$$F_r = \frac{1}{2} C_D \rho_{\text{medio}} A v^2 = k \cdot v^2 , \quad (\text{xx.11})$$

donde C_D es un coeficiente numérico cuyo valor depende de R_e y de la forma del objeto, A es el área transversal del cuerpo (πr^2 para una esfera), ρ_{medio} la densidad del fluido y v la velocidad del objeto. Estas consideraciones se deben tener en cuenta cuando se discuten problemas de movimientos de péndulos, pelotas de ping pong o fútbol, para los cuales, el roce con el aire rara vez tiene un régimen laminar. En otras palabras la fuerza de roce con el aire, en general, no es proporcional a la velocidad, $F_r = k_L v$.

Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo que incluyen una fuerza de roce proporcional a v^2 no tienen en general resolución analítica sencilla. Pero sí es posible encontrar una solución numérica de la ecuación de movimiento. Eligiendo la dirección de eje y vertical, Figura xx.7, tenemos:

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x |v| = -k v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (\text{xx.12})$$

$$F_y = m \frac{dv_y}{dt} = -mg - k v_y |v| = -mg - k v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (\text{xx.13})$$

Aquí mg es el peso del cuerpo y hemos supuesto que la fuerza de roce viene dada por $F_r = k v^2$.

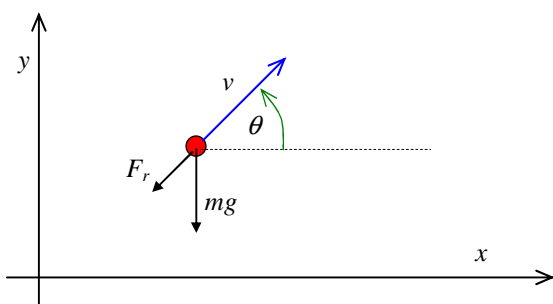


Figura xx.7. Objeto que se mueve con velocidad v . Su peso es mg y la fuerza de roce F_r tiene sentido contrario al de la velocidad v .

Si θ es el ángulo que forma la velocidad v con la dirección horizontal, tenemos:

$$F_x = -F_r \cos \theta = -F_r \frac{v_x}{v} \quad (\text{xx.14})$$

y

$$F_y = -F_r \text{sen} \theta - mg = -F_r \frac{v_y}{v} - mg \quad (\text{xx.15})$$

Por lo tanto:

$$a_x = -\frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x \quad (\text{xx.16})$$

y

$$a_y = -\frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y - g \quad (\text{xx.17})$$

La aproximación utilizada consiste en suponer que en un pequeño Δt , el cuerpo se desplaza:

$$\Delta x = v_x \Delta t \quad \text{y} \quad \Delta y = v_y \Delta t \quad (\text{xx.18})$$

Usando la aproximación de Euler,¹⁷ se puede obtener una aproximación aceptable de los datos con un $\Delta t \approx 0.01$ s, aunque utilizando el método de Runge-Kutta se obtiene una mejor aproximación para el mismo Δt . A partir de las expresiones (xx.16) y (xx.17) se obtienen los valores de v_y y v_x para cada Δt :

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x(t)\Delta t \quad (\text{xx.19})$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y(t)\Delta t \quad (\text{xx.20})$$

Iterando este procedimiento es posible encontrar $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$ y $y(t)$. El proceso descrito por las Ecs. (xx.18)-(xx.20) puede ser implementado fácilmente en cualquier hoja de cálculo.^{4,11,16} En Recursos de Experimentos de Física de www.fisicarecreativa.com¹¹ se pueden encontrar ejemplos de como realizar estos algoritmos con hojas de cálculo.

MÉTODO EXPERIMENTAL

El método experimental es idéntico al empleado en el caso de la bolilla de madera, discutido previamente, con la salvedad que ahora usamos una pelotita liviana de tenis de mesa. Se filma el movimiento con una cámara digital en modo video con las mismas recomendaciones que se hicieron en la anterior actividad.

Sugerencias de trabajo:

- ✓ Se sugiere filmar el lanzamiento de las pelotas en distintas condiciones de lanzamiento, es decir distintos ángulos θ_0 .
- ✓ Determine de la trayectoria experimental: $y(x)$.
- ✓ En un mismo gráfico, dibuje los datos experimentales de la trayectoria y las expectativas teóricas, Ec.(xx. 16)-(xx-18). Variando los valores de los parámetros de la expresión teórica, θ_0 , v_0 , x_0 e y_0 , trate de lograr el mejor ajuste posible. Realice esta operación para todos los ángulos estudiados.
- ✓ Obtenga las ecuaciones horarias experimentales $x(t)$ y $y(t)$. Grafique sus resultados, incluyendo en la misma figura las expectativas teóricas, Ec.(xx.16) a (xx.18) con los parámetros encontrados previamente.
- ✓ ¿Qué puede concluir acerca del modelo teórico propuesto para explicar sus datos?.

Anexo A - Régimen laminar y turbulento

Una característica importante de los fluidos reales es que tienen viscosidad.^{14,18} Una consecuencia notable de esta propiedad de los fluidos es que la capa de fluido adyacente al sólido no se mueve respecto de éste. Este efecto se evidencia en las aspas de un ventilador o hélice que permanecen con una capa de polvo, aún cuando las mismas giran a gran velocidad. La acumulación de polvo en las aspas es consecuencia de que el aire en contacto con ellas está

siempre en reposo, respecto del aspa. Esta capa de fluido que se adhiere a la superficie del sólido se conoce como *capa límite* o *capa de Prandtl*.^{13,14,18} La viscosidad también es responsable de que para arrastrar un objeto en el seno de un fluido sea necesaria una fuerza.

En la mecánica de los fluidos se distinguen dos regímenes movimiento, el flujo laminar y el flujo turbulento. En el flujo laminar las partículas de fluido se mueven ordenadamente siguiendo trayectorias estables y aproximadamente paralelas entre sí. Este es el régimen que se observa en el flujo de un canal en el que el fluido se mueve lentamente. Ver Figura xx.8. En el régimen turbulento, las partículas de fluido se mueven de un modo desordenado, cambiando su trayectoria en forma irregular o en torbellinos (desordenadamente), de modo que la velocidad del fluido en un dado punto de espacio parece variar constantemente en el tiempo. Estos dos regímenes se pueden observar fácilmente en el humo de un sahumero o de un cigarrillo encendido. Al principio, el flujo es laminar pero, al ir ascendiendo el humo, el flujo se va transformando en turbulento en forma paulatina. Se observa que la transición entre estos dos regímenes está asociada en buena medida al valor que tiene una cantidad adimensional, conocida como el número de Reynolds (Re). El Re representa el cociente entre las fuerzas inerciales y viscosas.



Figura xx.8. Transición de flujo laminar a turbulento. Aguas arriba el flujo es aproximadamente laminar, en el estrangulamiento producido por las rocas, el flujo del río se convierte en turbulento.

Imaginemos un flujo de fluido alrededor de una esfera de diámetro d , si la velocidad media del flujo lejos de la esfera es v y su viscosidad η , la *fuerza viscosa* producirá una fuerza de arrastre (roce) sobre la esfera en la dirección de flujo, que podemos estimarla del siguiente modo.¹⁴

$$F_{\text{visc}} = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dy} \approx \eta A \frac{v}{d} \approx \eta \pi \cdot d \cdot d \frac{v}{d} \approx \eta \pi \cdot d \cdot v \quad (\text{xx.21})$$

Aquí, hemos supuesto que el gradiente de velocidad es del orden de v/d y que el área transversal de la esfera es πd^2 .

Por otro lado, al impactar el fluido contra la esfera, hay un cambio de momento en las partículas de fluido, que requiere de una fuerza, que es ejercida por la esfera. Por la tercera ley de Newton, sobre la esfera se ejercerá una reacción igual y contraria. La resultante de la reacción tiende a mover la esfera en la dirección del flujo. Ésta es la fuerza inercial, que podemos estimarla del siguiente modo. Si suponemos que las partículas de fluido después de impactar contra la esfera salen en una dirección perpendicular a la que traían, el cambio de momento de un elemento de volumen de espesor dx y área A , igual a la sección transversal de la esfera será:

$$F_{\text{inerc}} \approx \frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \varepsilon \cdot \frac{(\rho A v) \Delta x}{\Delta t} \approx \varepsilon \cdot \rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2 \quad (\text{xx.22})$$

Aquí, $\Delta x/\Delta t = v$, y ε es un coeficiente del orden de la unidad que depende del tipo de choque: elástico, inelástico, etc. El cociente entre las fuerzas inerciales y viscosa da una idea de la importancia relativa de cada una de ellas y determina el valor del número de Reynolds:

$$\frac{F_{\text{inerc}}}{F_{\text{visc}}} \approx \frac{\varepsilon \cdot \rho \frac{\pi}{4} d^2 \cdot v^2}{\eta \pi \cdot d \cdot v} \approx \frac{\varepsilon}{4} \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\eta} = \frac{\varepsilon}{4} \cdot Re \quad (\text{xx.23})$$

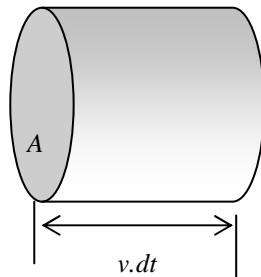


Figura xx.9. Volumen barrido por un objeto de área transversal A que se mueve en un medio fluido con velocidad v .

En un tiempo dt el objeto barrerá un volumen $(A v dt)$, Figura xx.9. A las moléculas o partículas de fluido se le imprimirá una velocidad εv , con ε un coeficiente del orden de la unidad y que depende del tipo de choque, elástico, inelástico, etc.— El momento adquirido por estas partículas de fluido en dt será:

$$dp = \rho (A v dt) \varepsilon v \quad (\text{xx.24})$$

Por lo tanto la fuerza de reacción contra el objeto que se mueve será:

$$F = \frac{dp}{dt} = \varepsilon \rho A v^2 \propto v^2 \quad (\text{xx.25})$$

Esta fuerza es el roce turbulento que el medio ejerce sobre el cuerpo en movimiento.

Finalmente es interesante destacar que la relación encontrada, $F \propto v^n$, es similar a la “ecuación de movimiento” de Aristóteles, es decir que la velocidad depende monótonamente de la fuerza aplicada. Sin embargo, nuestro estudio muestra que este resultado es totalmente compatible con las leyes de Newton, mostrando así que este tipo de dependencia de la fuerza con la velocidad ($F \propto v^n$) es un caso particular de un paradigma mayor: $F = m \cdot a$.

Es importante señalar que con las leyes de Newton es posible comprender tanto la caída de los cuerpos cuando el roce es despreciable como cuando no lo es. El hecho que los cuerpos que caen, con el roce despreciable, tienen una aceleración independiente de su peso es inconsistente con las leyes de movimiento de Aristóteles.

Por último, destacamos que la ecuación de movimiento de caída de un cuerpo con roce proporcional a v^2 puede ser resuelta analíticamente y su resultado servir para encontrar el valor de v_{fin} a partir de los valores medidos. Este procedimiento se describe en el Anexo B.

Anexo B - Movimiento de caída en un medio fluido con roce proporcional a v^2

La ecuación de movimiento de un cuerpo de masa m que cae en un medio fluido con velocidad proporcional al cuadrado de la velocidad, tomando la dirección de eje y apuntando hacia abajo es:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - m_a \cdot g - \beta \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 = m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) \cdot g - \beta \cdot A \cdot \rho \cdot v^2, \quad (\text{xx.26})$$

donde g es la aceleración de la gravedad, m_a la masa de aire desplazada por el cuerpo ($=m \cdot \rho / \rho_c$), ρ la densidad del medio, ρ_c la densidad del cuerpo, A es el área que barre el cuerpo al desplazarse y β una constante de proporcionalidad. Esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{dv}{v_f^2 - v^2} = \frac{g}{v_f^2} \cdot (1 - \rho / \rho_c) \cdot dt, \quad (\text{xx.27})$$

con $v_f^2 = m \cdot g \cdot (1 - \rho / \rho_c) / (\beta \cdot A \cdot \rho)$. Integrando esta expresión obtenemos:

$$v(t) = v_f \cdot \tanh\left(\frac{g \cdot (1 - \rho / \rho_c)}{v_f^2} \cdot t + c\right). \quad (\text{xx.28})$$

Si para $t=0$, $v(t)=0$, la constante de integración $c=0$. Si definimos

$$k_a = g \cdot (1 - \rho / \rho_c) / v_f^2 = \beta A \rho / m,$$

$$v(t) = v_f \cdot \tanh(k_a \cdot t). \quad (\text{xx.29})$$

Integrando una vez más esta última expresión, obtenemos:

$$y(t) = y_0 + \frac{v_f}{k_a} \cdot \ln[\cosh(k_a \cdot t)] = y_0 + \frac{v_f^3}{g \cdot (1 - \rho / \rho_c)} \cdot \ln[\cosh(k_a t)], \quad (\text{xx.30})$$

aquí y_0 es la posición del cuerpo para $t = 0$. Dado que lo que el experimento de caída de un globo lo que se mide es justamente $y(t)$, la expresión (xx.30) puede contrastarse directamente con los datos experimentales. Como los únicos parámetros desconocidos de esta expresión son: la velocidad límite o final v_f y k_a , estos valores se puede obtener del ajuste de la curva teórica a los datos experimentales.

Referencias

- ¹ Digital Imaging Tutorial, Cornell University, <http://www.library.cornell.edu/preservation/tutorial/intro/intro-01.html>
- ² M. E. Saleta, D. Tobia, and S. Gil, "Experimental study of Bernoulli's equation with losses", *Am. J. Phys.* **73**, 598 (2005).
- ³ S. Gil, H.D. Reisin, E. Rodríguez, "Using a digital camera as a measuring device", *Am. J. Phys.* **74**, 768, (2006).
- ⁴ S. Calderón, P. Núñez, y S. Gil, "Cámara digital como instrumento de laboratorio - estudio del tiro oblicuo," *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **3**(1), 84-92, (2009).
- ⁵ xyExtract Graph Digitizer <http://www.goldsoftware.com/download5149.html> , <http://www.shareup.com/xyExtract-download-19171.html>
- ⁶ Data Point, disponible como shareware en <http://www.stchas.edu/faculty/gcarlson/physics/datapoint.htm> . y en http://www.fisicarecreativa.com/ajp/soft_sg.htm
- ⁷ Tracker, Disponible en <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>
- ⁸ Logger Pro® Vernier Software, www.vernier.com
- ⁹ Physics ToolKit . Disponible en www.physicstoolkit.com
- ¹⁰ K. E. Horst, "The shape of lamp shade shadows," *Phys. Teach.* **39**, 139-140 (2001).
- ¹¹ Giancoli, D. C., *Física: Principios con Aplicaciones*. Prentice Hall México 1997.
- ¹² Wilson, J., *Física*, 2ª ed., Prentice Hall, México, 1996.
- ¹³ Aguiar, C. y Rubini, G. , "La aerodinámica de la pelota de fútbol", *Rev. de Ens. de la Física* **19**, (1) 71-82 (2006).
- ¹⁴ Munson, B.; Young, D. y Okiishi, T. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, New York: Wiley, 2nd ed. (1994)
- ¹⁵ Takahashi, K y Thompson, D. "Measuring air resistance in a computerized laboratory," *Am. J. Phys.* **67** (8),709-711 (1999)
- ¹⁶ S, E. Calderón, S. López y S. Gil , "Determinación de la fuerza de roce con el aire usando nuevas tecnologías," *Revista de Enseñanza de la Física de la Asociación de Prof. de Física de la Rep. Arg.*, Vol. **20** (1) 55-64 (2007)
- ¹⁷ Método de Euler, Wikipedia - http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler
- ¹⁸ Feynman, R.P.; Leighton, R.B.; and Sand, M.(1964); *Feynman Lectures On Physics*, Addison-Wesley, Reading, MA, Vol. 2, Cap. 41

Índice Alfabético

Marcadores	Nombre Marcador
cámara digital	camaraD
pixel	pixel
Fps	fps
fuerza de roce	roceA

tiro oblicuo	tiroO
vídeo	video