

Introducción a la dinámica

Segunda Ley de Newton



Objetivo

Determinación de la aceleración de un móvil (carrito) usando diversas técnicas experimentales con el dispositivo indicado esquemáticamente en la Figura 1, que incluye un fotointerruptor para medir el desplazamiento en función del tiempo. Estudio experimental de la segunda ley de Newton.

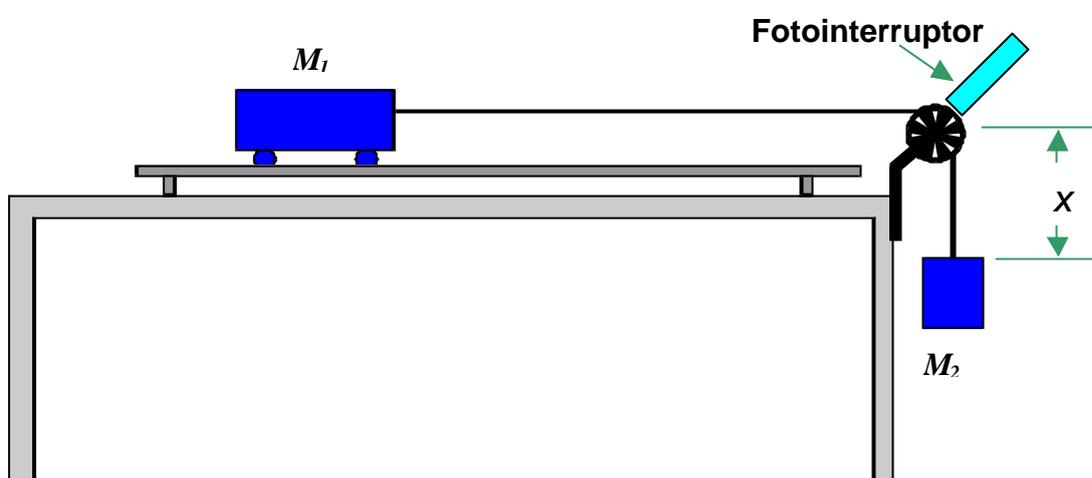


Figura 1: Dispositivo experimental. Un carrito (M_1) se mueve sobre una mesa nivelada tirado por otra masa (M_2) que cuelga de la mesa. La polea, de momento de inercia I_p y radio R_p , está dotada de rayos con un fotointerruptor conectado a una PC para determinar la posición del sistema en función del tiempo. El ángulo q que forma el riel con la horizontal se ajusta lo más próximo posible a cero, usando un nivel. La cuerda que conecta al sistema, tiene una masa M_c y una longitud total L_c .

Actividad 1

Estudio preliminar

- Usando el dispositivo de la Figura 1, elegir las masas M_1 y M_2 de modo tal que el movimiento sea más bien lento, para poder medir con un cronómetro el tiempo que le lleve a la masa M_2 bajar unos 70 cm (tiempos del orden del segundo o mayores). Determine la aceleración a del sistema a partir de la medición de tiempos con el

cronómetro. ¿Con qué errores determina a ?. **Sugerencia:** nivele el sistema de modo que el ángulo q entre el horizonte y el riel donde se mueve el carrito sea $q = 0$.

- Sin cambiar el dispositivo, determine la aceleración usando dos fotointerruptores que midan el tiempo de paso de M_1 en dos lugares distintos de su trayectoria. ¿Con qué errores determina ahora la aceleración?. Distinga si el resultado aproxima mejor el valor de la aceleración media o instantánea del carrito M_1 .
- En las mismas condiciones anteriores medir a , usando una "cebra" en el carrito M_1 . ¿Cuáles son los errores en la determinación de a esta vez?.
- Para el mismo dispositivo, medir a usando un fotointerruptor en la polea. ¿Qué radio corresponde usar? ¿Cómo se comparan los valores de a obtenidos por los distintos métodos utilizados?

Actividad 2

Estudio dinámico – Segunda Ley de Newton

- Usando las leyes de la dinámica demuestre que, para el sistema de la Figura 1, suponiendo las masas de la polea y del hilo son despreciables, la aceleración del sistema está dada por:

$$a = \frac{(M_2 \cdot g - f_r)}{(M_2 + M_1)} \quad (1)$$

- donde f_r es la fuerza de roce entre las partes del sistema. Un análisis más detallado, incluyendo la masa no nula de la polea, da como resultado:

$$a = \frac{\left(M_2 - \frac{f_r}{g} \right)}{\left(M_2 + M_1 + \frac{I_p}{R_p^2} \right)} \cdot g \quad (2)$$

Aquí I_p es el momento de inercia de la polea, que tiene un radio R_p . En el apéndice 1 de esta guía se presentan los lineamientos de obtención y los resultados de la variación de la velocidad y aceleración en el tiempo, si la masa m_c de la cuerda no es despreciable. En el apéndice 2 se sugiere un método de obtención experimental del momento de inercia de la polea I_p .

- Estudie experimentalmente la aceleración del sistema de la Figura 1 para distintos valores de M_2 . Luego represente gráficamente:

$$(M_2 + M_1 + \frac{I_p}{R_p^2}) \cdot a \quad \text{vs.} \quad M_2 \quad (3)$$

- ¿Qué características tiene este gráfico? ¿Qué puede concluir de este gráfico respecto del valor de g (aceleración de la gravedad)?
- ¿Cuál es el valor de la fuerza de roce para este sistema? ¿Qué puede decir a partir de sus datos respecto de la validez de la expresión (2) y de la Segunda Ley de Newton a partir de la cual fue deducida? ¿Qué cambiaría en este análisis si, además de variar M_2 , se hubiese variado también M_1 ?



Bibliografía

1. *Trabajos prácticos de física*, J. Fernández y E. Galloni, Centro de Estudiantes de Ingeniería, UBA, Buenos Aires (1963).
2. *Curso superior de física práctica*, B. L. Worsnop y H. T. Flint, Eudeba, Buenos Aires (1964).

Apéndice 1

Caso de masa de la cuerda no despreciable

Para tener en cuenta la posible influencia de la masa de la cuerda (m_c), presentamos los lineamientos de un procedimiento simple para resolver este problema en el caso general, incluyendo fuerza de roce y en momento de inercia de la polea (I_p). Suponemos que la cuerda tiene una longitud L_c y en un determinado instante t se ha desplazado una distancia x ($0 < x < L_c$) y ha adquirido una velocidad $v = dx/dt$, como se ilustra esquemáticamente en la figura 1. La energía cinética de sistema es:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left(M_1 + M_2 + \frac{I_p}{R_p^2} + m_c \right) \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot v^2 \quad (\text{A1})$$

Aquí M_T representa la masa total del sistema, incluyendo la inercia de la polea. La energía potencial, tomando como referencia ($V=0$) el plano de la mesa horizontal:

$$V(x) = -M_2 \cdot x \cdot g - \frac{m_c}{L_c} \cdot x \cdot \frac{x}{2} \cdot g \quad (\text{A2})$$

Aquí, hemos tenido en cuenta que después que la cuerda recorre una distancia x , el centro de masa de este tramo de la cuerda esta a una distancia $x/2$ de la altura de la mesa (tomada como referencia), también se tubo en cuenta que la masa del tramo vertical de la cuerda es igual a $m_c \cdot (x/L_c)$. Dado que existe una fuerza de roce f_r presente en el sistema, la variación de la energía total por unidad de tiempo, será igual a la fuerza de roce por la velocidad, esto es:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+V)}{dt} = -f_r \cdot v \quad (\text{A3})$$

o bien

$$M_T \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} - M_2 \cdot g \cdot v - \frac{m_c}{L_c} \cdot g \cdot x \cdot v = -f_r \cdot v \quad (\text{A4})$$

de donde obtenemos la ecuación de movimiento del sistema:

$$M_T \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{m_c}{L_c} \cdot g \cdot x = M_2 \cdot g - f_r \quad (\text{A5})$$

o bien

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{m_c}{M_T \cdot L_c} \cdot g \cdot x = \frac{M_2 \cdot g - f_r}{M_T} \quad (\text{A6})$$

Definiendo

$$I^2 = \frac{m_c}{M_T \cdot L_c} \cdot g \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{M_2 \cdot g - f_r}{M_T} \quad (\text{A7})$$

la ecuación de movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - I^2 \cdot x = a_0 \quad (\text{A8})$$

que puede integrarse inmediatamente para dar como solución:

$$x(t) = K1 \cdot (\exp(I \cdot t) + \exp(-I \cdot t)) + \frac{a_0}{2 \cdot I^2} \quad (\text{A9})$$

Imponiendo las condiciones iniciales: $x(t=0)=0$ y $v(t=0)=0$, tenemos:

$$x(t) = \frac{a_0}{2 \cdot \mathbf{I}^2} \cdot (\exp(\mathbf{I} \cdot t) + \exp(-\mathbf{I} \cdot t) - 2) \quad (\text{A10})$$

y

$$v(t) = \frac{a_0}{\mathbf{I}} \cdot (\exp(\mathbf{I} \cdot t) + \exp(-\mathbf{I} \cdot t)). \quad (\text{A11})$$

Para el caso en que $\mathbf{I} \cdot t \ll 1$, las expresiones (A10) y (A11) se reducen a:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \cdot t^2 \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{I}^2 \cdot t^2}{12}\right) = \left(\frac{M_2 \cdot g - f_r}{2 \cdot M_T}\right) \cdot t^2 \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{I}^2 \cdot t^2}{12}\right) \quad (\text{A12})$$

y

$$v(t) = a_0 \cdot t \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{I}^2 \cdot t^2}{6}\right) = \left(\frac{M_2 \cdot g - f_r}{M_T}\right) \cdot t \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{I}^2 \cdot t^2}{6}\right). \quad (\text{A13})$$

Para tener una expresión en primera aproximación, tenemos que:

$$L_c \approx \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot T^2. \quad (\text{A14})$$

de donde la velocidad final, después de que la masa M_2 decae una distancia L_c será:

$$v_f^2 \approx a_0 \cdot T \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{I}^2 \cdot T^2}{6}\right). \quad (\text{A15})$$

de donde la aceleración media, obtenida de ajustar con una recta la dependencia de $v(t)$ versus t en todo el recorrido será:

$$\bar{a} = a_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_c}{M_T} \cdot g \quad (\text{A16})$$

de donde obtenemos:

$$M_T \cdot \bar{a} = \left(m_2 + \frac{1}{3} \cdot m_c\right) \cdot g - f_r \quad (\text{A17})$$

Apéndice 2

Cómo determinar el momento de inercia de la Polea I_p .

Para estimar el valor del momento de inercia de la polea, I_p , un procedimiento simple de implementar usando una polea con rayos y un fotointerruptor consiste en enrollar a la polea una masa conocida, m , y medir la aceleración de la polea mientras el hilo del que cuelga esta aún está unida a la polea, a^- , y la aceleración de la polea después que el hilo se desprende, a^+ . Suponiendo que la cupla ejercida por la fuerza de roce (\mathbf{t}_r) es constante e igual antes y después de que el hilo se desprende, tenemos:

$$I_p \cdot \frac{a^-}{R_p} = m \cdot g \cdot R_p - \mathbf{t}_r \quad (\text{A18})$$

y

$$I_p \cdot \frac{a^+}{R_p} = -\mathbf{t}_r \quad (\text{A19})$$

Donde I_p es el momento de inercia de la polea, R_p su radio efectivo (radio al eje de hilo) y \mathbf{t}_r el torque debido al roce. Despejando los valores de I_p y \mathbf{t}_r tenemos:

$$I_p = \left(\frac{m \cdot g \cdot R_p^2}{a^- + a^+} \right) \quad (\text{A20})$$

y

$$\mathbf{t}_r = m \cdot g \cdot R_p \cdot \left(\frac{a^+}{a^- + a^+} \right). \quad (\text{A21})$$