

LA COMUNIDAD DEL ANILLO (de THOMPSON)

*Petriella Alberto, Rodriguez Imazio Paola, Urdaniz Corina.
albertopetriella@hotmail.com, paolaimazio@hotmail.com, oersted@hotmail.com
Facultad de Ciencias Exactas, Laboratorio de Fisica 3, año 2003*

Nos propusimos medir la fuerza que actúa sobre un anillo de aluminio en presencia de un campo magnético externo y comprobar los orígenes de dicha fuerza. Se encontró la dependencia de dicha fuerza con distintos parámetros y se comprobó que la fuerza se deba a una diferencia de fase entre el campo magnético radial y longitudinal.

I. INTRODUCCIÓN

Una manera posible de lograr la levitación magnética es colocando una bobina con un núcleo de hierro o ferrite en forma vertical conectada a una fuente de tensión alterna y deslizando un anillo de conductor (aluminio) como se muestra en la **figura 1**.

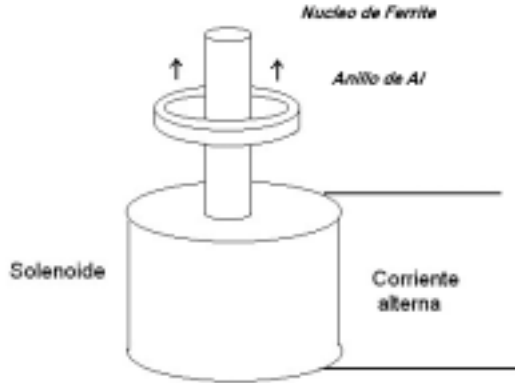


Figura 1: levitación del anillo.

Al circular corriente por el solenoide, el campo magnético induce una f.e.m en el anillo, debida a la variación del flujo en su interior. Por lo tanto se produce una corriente que genera un campo magnético, el cual a su vez se opone a dicha variación (Ley de Lenz).

La expresión para la fuerza de Lorentz sobre el anillo es:

$$F_z = \oint_{\text{Anillo}} I_a dl \times B = 2\pi r \cdot I_a \cdot B_r(z), \quad (1)$$

donde I_a es la corriente que circula por el anillo y $B_r(z)$ es la componente radial del campo magnético. Además $I_a = \varepsilon/R$, con $\varepsilon = -d\Phi/dt$, R es la resistencia del anillo (que se supone constante) y Φ el flujo a través del anillo. Entonces:

$$I_a = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2)$$

El flujo que atraviesa el anillo es:

$$\hat{\Phi} = \iint_{\text{anillo}} B \cdot ds = B_z \pi \cdot r^2, \quad (3)$$

siendo B_z la componente axial del campo magnético y r el radio del anillo (para el estudio del fenómeno usaremos las coordenadas cilíndricas r , θ y z). Partiendo de la expresión para el campo generado por un solenoide se llega a $B_z = k\mu_0 n I_o \cos(\omega t)$, con k una constante geométrica, n el número de vueltas del solenoide e $I_o \cos(\omega t)$ la corriente que circula por el solenoide. El flujo a través del anillo puede entonces escribirse como:

$$\Phi = k\mu_0 n \pi I_o \cos(\omega t) = \Phi_0(z) I_o \cos(\omega t), \quad (4)$$

Usando (2) y (4) se obtiene el valor de la corriente que circula por el anillo:

$$I_a = \frac{\omega \cdot \hat{\Phi}_0(z) I_0}{R} \text{sen}(\omega t). \quad (5)$$

Considerando la **figura 2** y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot B = 0$, el flujo total a través de una superficie cerrada es igual a cero.

$$\hat{\Phi}_{Total} = \hat{\Phi}_{Lateral} + \hat{\Phi}_{Tapas}^1$$

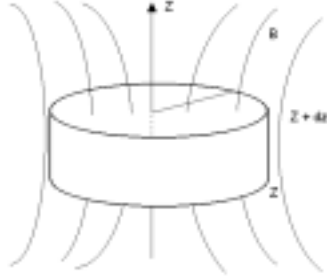


Figura 2: superficie Gaussiana.

El flujo a través de las tapas se puede escribir como:

$$\hat{\Phi}_{Tapas} = \hat{\Phi}_z(z + dz) - \hat{\Phi}_z(z),$$

con lo cual

$$B_r \cdot 2\pi r \cdot dz + \hat{\Phi}_z(z + dz) - \hat{\Phi}_z(z) = 0.$$

Entonces, usando el valor del flujo dado por ecuación 4, se llega a una expresión para B_r .

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_0(z)}{\partial z} I_0 \cos(\omega t) \right) \quad (6)$$

Reemplazando (4) y (6) en la **ecuación 1**, la fuerza en la dirección “z” ejercida sobre el anillo será:

$$F_z = -\hat{\Phi}_0(z) \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}_0(z)}{\partial z} I_0^2 \omega \text{sen}(\omega t) \cdot \cos(\omega t).$$

Tomando el promedio temporal de la fuerza sobre un ciclo se obtiene:

$$\langle F_z \rangle = 0. \quad (9)$$

Según este resultado no se produciría el fenómeno de levitación del anillo.

Si suponemos que existe un desfase entre el campo magnético radial y longitudinal que depende de la posición del anillo, la **ecuación 4** se puede escribir de la siguiente forma:

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_0(z) I_0 \left[\cos(\omega t - \hat{\Theta}(z)) \right]. \quad (10)$$

Repetiendo los cálculos anteriores, tenemos que:

$$F_z = \frac{\varepsilon_0(z)}{R} I_0^2 \text{sen}(\omega t - \hat{\Theta}(z)) \left[\frac{\partial \hat{\Phi}_0(z)}{\partial z} \cos(\omega t - \hat{\Theta}(z)) + \hat{\Phi}_0(z) \frac{\partial \hat{\Theta}(z)}{\partial z} \text{sen}(\omega t - \hat{\Theta}(z)) \right],$$

donde $\varepsilon_0(z) = \omega \cdot \hat{\Phi}_0(z)$.

En este caso el promedio temporal de la fuerza es:

$$\langle F_z \rangle = \frac{\varepsilon_0^2(z) I_0^2}{2R\omega} \frac{\partial \hat{\Theta}(z)}{\partial z}. \quad (11)$$

Se observa que la fuerza $\langle F_z \rangle$ es proporcional a I_0^2 y que el término de fase $(\partial \hat{\Phi}_0 / \partial z \neq 0)$ introducido en la **ecuación 10** es fundamental para que $\langle F_z \rangle$ sea distinto de 0. Debe notarse entonces que las leyes de Lenz y de Faraday no bastan para explicar el comportamiento del anillo. La fuerza depende también de la diferencia de fase existente entre la inducción magnética que el solenoide produce en el anillo y la corriente que circula por este. El objetivo de este trabajo consiste en poner a prueba experimentalmente este modelo explicativo de la levitación del anillo. Para ello se estudiará la variación de la fuerza con I_0 y con $\partial \hat{\Theta} / \partial z$.

¹ El símbolo ^ indica las cantidades en presencia del anillo.

II. DESARROLLO EXPERIMENTAL

MEDICIÓN DE LA FUERZA DE LORENTZ.

El montaje para realizar las mediciones de la fuerza en función de la corriente I_0 se muestra en la **figura 3**. Conectamos un transformador de tensión variable en serie con un amperímetro y el solenoide².

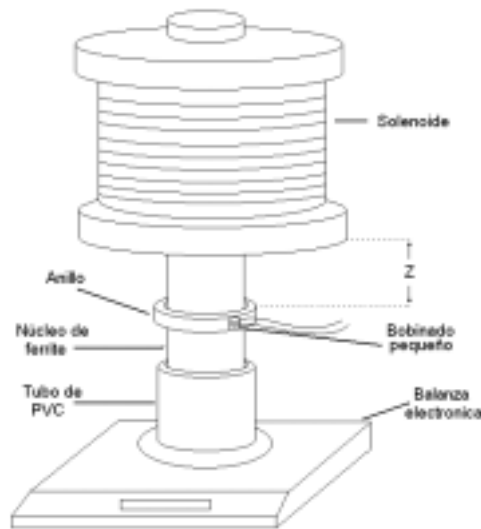


Figura 3: montaje experimental para las mediciones de la fuerza. El solenoide y el núcleo de Ferrite están sujetos a un soporte externo, no mostrado en este dibujo.

Al circular corriente por el solenoide, el anillo siente una fuerza dada por la **ecuación 11** y empuja el tubo de PVC. El peso (en gramos) que entrega la balanza es una medición directa de la fuerza (se taró la balanza para que el cero en la fuerza coincidiera con la no circulación de corriente).

Para cada valor de corriente I_0 tomamos el valor de la fuerza medida por la balanza; el procedimiento se realizó para 4 valores distintos de distancia entre el solenoide y el anillo.

² Las características del solenoide y del anillo aparecen en el **Apéndice 1**.

Luego se procedió a variar la fuerza en función de la distancia “z” entre el anillo y el solenoide manteniendo la corriente constante. Se desplazó el anillo a lo largo del núcleo de ferrite y se midió el valor de la fuerza en los diferentes puntos.

MEDICIÓN DE LA DIFERENCIA DE FASE.

Por último, pasamos a medir la diferencia de fase $\hat{\Theta}(z)$ como función de la altura. Montamos el dispositivo que se muestra en la **figura 1** y agregamos al anillo dos bobinados pequeños, dispuesto como muestra la **figura 5**. La bobina 1 se encuentra 1 cm sobre el anillo mientras que la bobina 2 se encuentra 2 cm debajo del mismo.

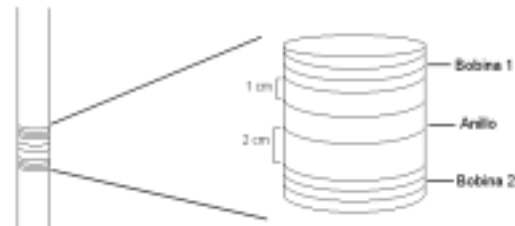


Figura 5: bobinados pequeños para el estudio de la diferencia de fase.

Se conectó cada bobina a un canal de un osciloscopio. El campo axial B_z induce una fem en cada bobina: analizando las fases de las dos señales se puede estudiar la diferencia de fase $\Theta(z)$.

III. RESULTADOS

FUERZA EN FUNCIÓN DE LA CORRIENTE

Los resultados obtenidos para los cuatro valores de altura se muestran en la **figura 5**.

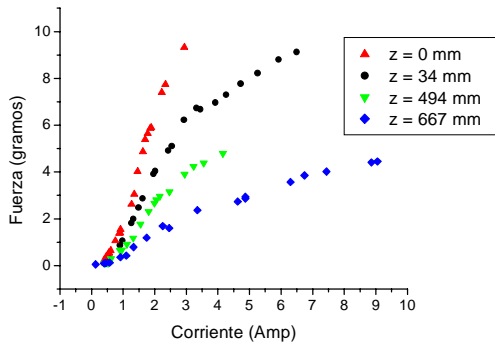


Figura 5: fuerza en función de la corriente. “z” es la distancia anillo-solenoide

Puede verse que el comportamiento parecería obedecer lo predicho por la **ecuación 11**, en un rango que va desde 0 a 2 Amp (esto es, dependencia cuadrática con la corriente que circula por el solenoide). En la **figura 6**, se observan los valores dentro del rango de 0 a 2 Amp: se graficó la fuerza en función de la corriente al cuadrado para una mejor apreciación y se ajustó mediante una recta.

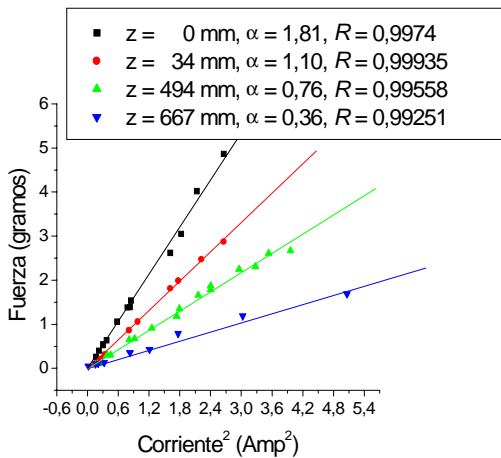


Figura 6: fuerza en función de la corriente al cuadrado. “z” es la distancia anillo-solenoide, α es el coeficiente angular de los ajustes y R es el coeficiente de correlación.

Vemos que, en general, la aproximación lineal es satisfactoria por lo que se puede verificar que la fuerza depende del

cuadrado de la corriente que circula por el solenoide.

Una explicación posible del comportamiento a partir de los 2 Amp, es que la corriente que circula por el anillo es lo suficientemente grande para que el anillo se caliente y varíe su resistencia. Vemos en la **ecuación 11** que la fuerza es inversamente proporcional a la resistencia del anillo. Los valores de fuerza obtenidos para corrientes grandes quedan por debajo de los ajustes lineales del gráfico de la **figura 6**. Esto es esperable si la resistencia del anillo aumenta.

FUERZA EN FUNCIÓN DE LA ALTURA

Para esta parte se fijó la corriente en 1,33 Amp y se varió la distancia entre el anillo y el solenoide. No tenemos un modelo teórico para el comportamiento de la fuerza con la altura. Sin embargo se graficó la fuerza en escala logarítmica y se ajustó mediante una recta (se obtuvo un coeficiente de correlación $R = 0,99585$). Este resultado indica que la dependencia de la fuerza con la distancia es exponencial con buena aproximación. En la **figura 7** se muestran los resultados obtenidos experimentalmente y la función exponencial que los ajusta..

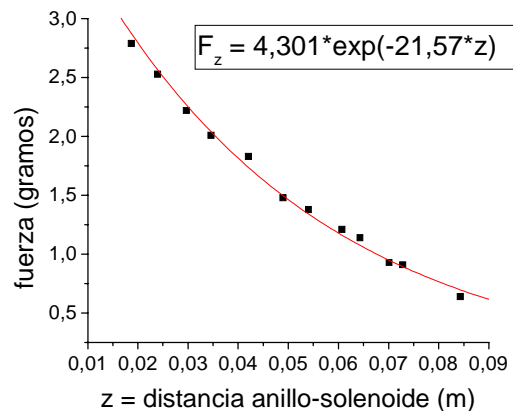


Figura 7: fuerza en función de la distancia anillo-solenoide ($I_0 = 1,33$ Amp).

ESTUDIO DE LAS FASES

Como ya se mencionó se midió la diferencia de fase entre las señales de la bobina. En la **figura 8** se muestran las señales en el osciloscopio para una corriente de 1 Amp y $z = 2,3$ cm (“z” en este caso es la altura del anillo sobre el solenoide, ver montaje de la **figura 1**).

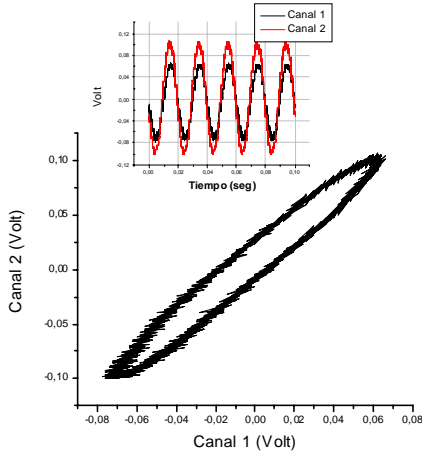


Figura 8: señales de los bobinados pequeños.

La forma elíptica indica la existencia de una diferencia de fase (el método usado para determinar este valor se explica en el **Apéndice A**). Para hallar $\partial\Theta/\partial z$ de la **ecuación 11**, se tomó esta diferencia de fase $\Delta\Theta$ y se la dividió por Δz , distancia entre los dos bobinados pequeños (3cm). Se midió la diferencia de fase para distintas alturas, manteniendo constante la corriente (0,96 Amp). Se realizó un ajuste mediante una función exponencial. Los resultados se muestran en la **figura 9**.

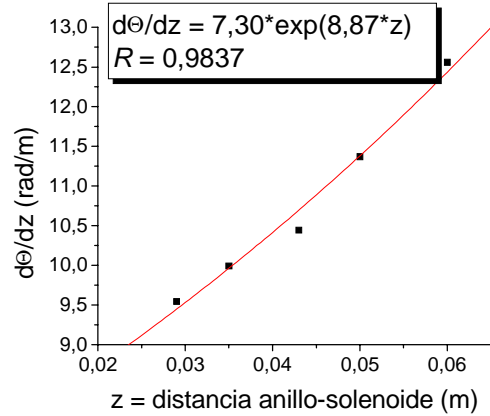


Figura 9: diferencia de fase en función de la altura “z” para corriente constante ($I_0 = 0,96$ Amp).

Por último se midió la amplitud de la fem inducida en el anillo en función de altura a una corriente constante de 0,96 Amp (**Figura 10**). Para esto, se montó uno de los bobinados pequeños alrededor del anillo y se midió la amplitud pico a pico de la señal en el osciloscopio. Se ajustó con una recta.

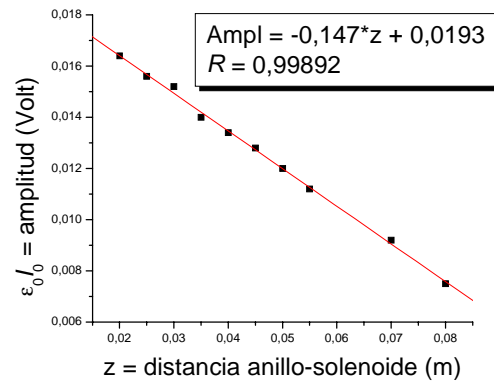


Figura 10: amplitud de la señal del bobinado alrededor del anillo en función de la altura del anillo. La corriente es constante ($I_0 = 0,96$ Amp).

Es posible poner a prueba los ajustes de los gráficos anteriores para los que no se tiene un modelo teórico. Volviendo a la **ecuación 11** tenemos que el valor de la fuerza sobre el anillo vale:

$$\langle F_z \rangle = \frac{\epsilon_0^2(z) I_0^2}{2R\omega} \frac{\partial\Theta(z)}{\partial z}. \quad (11)$$

El valor en Volt de $\varepsilon_o(z)I_0$ es igual a la amplitud de la señal del bobinado alrededor del anillo; su comportamiento fue aproximado por la función lineal $A(z) = -0,147z + 0,0193$ (ver **figura 10**). Por su parte el valor de $\partial\Theta/\partial z$ puede obtenerse de ajuste del gráfico de la **figura 11**, que está dado por una función exponencial $\partial\Theta/\partial z(z) = D(z) = 7,30e^{8,87z}$. La dependencia de la fuerza con la altura está dada entonces por:

$$\begin{aligned} \langle F_z \rangle (z) &= \frac{A(z)^2 D(z)}{2R\omega} = \\ &= \frac{1}{2R\omega} (-0,147z + 0,0193)^2 (7,30e^{8,87z}) \end{aligned} \quad (12)$$

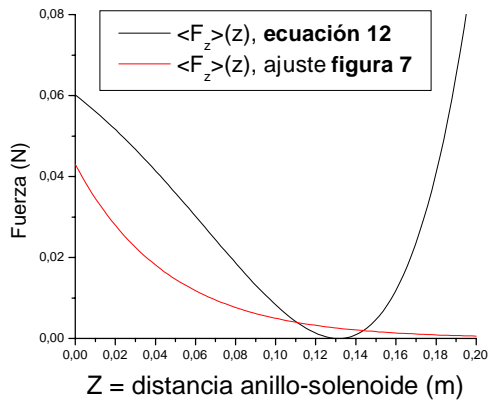


Figura 11: gráfico de la fuerza en función de “z”. La línea negra es el gráfico de la **ecuación 12** ($I_0 = 0,96$ Amp). La línea roja es el gráfico del ajuste exponencial de la **figura 7** ($I_0 = 1,33$ Amp). Las mediciones realizadas no superaron los 0,09 m, pero se muestra el comportamiento de las funciones para valores mayores de “z”.

La **ecuación 12** muestra la dependencia del valor medio de la fuerza en la dirección “z” en función de la distancia entre el anillo y el solenoide, para $I_0 = 0,96$ Amp. Derivamos esta ecuación de mediciones indirectas (se midió la diferencia de fase y la amplitud de la señal). Recordemos que en la primera parte se realizó una medición directa de la fuerza en función de la distancia “z” entre

el solenoide y el anillo para corriente constante; se halló una relación exponencial (**figura 7**). Esta medición se llevó a cabo para $I_0 = 1,33$ Amp. Se grafica a continuación la **ecuación 12** y el ajuste de la **figura 7**.

Del gráfico anterior se ve que una diferencia fundamental entre las dos funciones: si bien ambas son decrecientes entre $z = 0$ y $z = 0,12$ m (éste es el rango donde se midió), la que corresponde a la **ecuación 12** diverge para valores grandes de “z”. Éste no es un resultado esperable físicamente porque para valores grandes de “z” el campo magnético creado por el solenoide tendería a disminuir y con él la fuerza. Por otra parte, según la **ecuación 11** y las mediciones realizadas de la fuerza en función de la corriente I_0 , los valores de la fuerza para $I_0 = 1,33$ Amp (línea roja) deberían ser mayores que los valores de la fuerza para $I_0 = 0,96$ Amp (línea negra) y esto no sucede.

En conclusión, la forma exponencial obtenida a partir de las mediciones directas de la fuerza con la balanza serían más apropiadas para explicar la dependencia de la fuerza con la distancia “z”.

IV. CONCLUSIONES

Observamos que el origen de la fuerza que siente el anillo no puede explicarse solo con las leyes de Lenz y Faraday, sino que también existe una diferencia de fase entre los campos, la cual origina la levitación del anillo.

El comportamiento de la fuerza de levitación sobre el anillo puede entenderse por el argumentos físicos incluidos en la **ecuación 11**. Esta aproximación parece adecuada, aunque los resultados indicados en la Figura 11 no son del todo satisfactorios. El análisis de este

comportamiento seguramente requiere un análisis más detallado.

determinan a partir de las relaciones:
 $\langle Y_1^2 \rangle = A^2/2$, $\langle Y_2^2 \rangle = B^2/2$.

En nuestro caso las dos señales Y_1 e Y_2 corresponden a las señales que llegan de los bobinados pequeños al osciloscopio.

V. APÉNDICES

1. Datos y dimensiones del anillo y el solenoide.

En este trabajo se usó un solenoide de 500 vueltas con una resistencia de $1,5\Omega$. Por su parte, las dimensiones del anillo de aluminio son:

- diámetro exterior: 25,2mm;
- diámetro interior: 19,2 mm;
- altura: 9,2mm;
- peso: 5,25 gramos.

La resistencia R del anillo se calcula como $R = r_{al}c/a$, donde “ r_{al} ” es la resistividad del aluminio ($2,82 \times 10^{-8}\Omega m$), “ c ” es la circunferencia del anillo y “ a ” es la sección de área. El anillo usado en este trabajo tiene una resistencia de $7,2 \times 10^{-5}\Omega$.

2. Determinación de la diferencia de fase entre dos señales sinusoidales.

Sean dos señales sinusoidales Y_1 e Y_2 de la misma frecuencia y distintas amplitud y fase. Podemos escribir: $Y_1 = A \sin(\omega t)$ e $Y_2 = B \sin(\omega t + \varphi)$, donde “ φ ” es la diferencia de fase a determinar. Multiplicando las dos señales se tiene:

$$Y_1 Y_2 = AB \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi).$$

Desarrollando y agrupando se llega a:

$$Y_1 Y_2 = AB [\sin^2(\omega t) \cos(\varphi) + (1/2) \sin(2\omega t) \sin(\varphi)].$$

Promediando, se obtiene:

$$\langle Y_1 Y_2 \rangle = AB \cos(\varphi) \text{ donde } A \text{ y } B \text{ se}$$

VI. REFERENCIAS

S. Y. Mak y K. Young, *Floating metal ring in an alternating magnetic field*, Am. J. Phys. **54** (9), Septiembre 1986.

E. J. Churchill y J. D. Noble, *A demonstration of Lenz' Law?*, Am. J. Phys. **39**, Marzo 1971.

W. M. Saslow, *Electromechanical implications of Faraday's Law: A problem collection*, Am. J. Phys. **55** (11), 986 – 993 (1987).

J. H. Tjossen y V. Cornejo *Measurements and mechanisms of Thomson's jumping ring*, Am. J. Phys. **68** (3), 238 – 244 (2000).