

Experimentos con redes de impedancia

Nelson A. Cánepa Pérez^(a)

Asignatura de Física de la Universidad Nacional de General San Martín, Campus Miguelete, Martín de Irigoyen N° 3100(1650) San Martín, Buenos Aires

Resumen

Presentamos un trabajo de laboratorio que tiene como propósito extender los modelos de redes resistivas a redes infinitas de impedancia. Para esto; en una primera etapa medimos la resistencia entre dos nodos de una red resistiva y validamos los resultados con lo predicho por la teoría. Y en una segunda etapa, tratamos de generalizar el método que predice la resistencia entre dos nodos de una red resistiva y llevarlo al dominio de las impedancias.

D) INTRODUCCIÓN

Hacemos una breve reseña de cómo ha evolucionado el estudio de la resistencia entre dos nodos de una red de infinita resistencias. En 1959 Pourcell y van der Pauw presentaron trabajos de mediciones sobre propagación de corriente en redes resistivas, doce años después basado en estos modelos de mallas Lavatelli⁽¹⁾ hace hincapié en cómo la red de resistencia se puede considerar como una aproximación discreta a un medio de resistencia continua y lo menciona como buenos ejemplos en la enseñanza de la física para solucionar problemas complejos, modelizando y aplicando integrales con un conocimiento medio del cálculo infinitesimal, entre otros problemas, él plantea la solución en dos dimensiones que en este trabajo tratamos de generalizar a redes de impedancia.

En 1993 Venezian⁽²⁾ basándose en documentos de van der Pauw y Pourcell, presenta una publicación donde da una solución detallada, utilizando principios básicos estudiados en la física como son; la simetría, la superposición, Kirchhoff y la linealidad de la ley de Ohm y a través de la integración predice el valor de la resistencia entre dos nodos. En éste trabajo que presentamos, tomamos parte del análisis que Venezian realiza, para obtener los datos predichos por la teoría y que trataremos de verificar a través de la experimentación sobre una red resistiva de dos dimensiones.

Atkinson⁽³⁾ 1998 expone el desarrollo de Venezian en dos dimensiones y amplía la solución utilizando el cálculo, a estructuras de resistencia en 3 dimensiones, triangulares y hexagonales.

Denardo⁽⁴⁾ 1999 hace un estudio a través de la experimentación sobre la solución propuesta por Venezian para este tipo de redes de resistencias en dos dimensiones, en el trabajo que se presenta se toman alguna de sus observaciones en lo referente al efecto de borde en redes finitas.

En 2001 Cserti⁽⁶⁾, realiza un estudio de las perturbaciones en las redes resistivas, si bien se basa en algunos trabajos de Lavatelli, Venezian y Atkinson entre otros, él orienta su estudio a las redes resistivas en dos dimensiones cuando éstas pierden su simetría, estudia como responde el sistema cuando una resistencia es quitada o puesta en cortocircuito dentro de la red.

Si bien hay muchas publicaciones sobre redes resistivas, modelos que dan solución a diferentes estructuras tanto en el campo puramente teórico, como experimental, se encontró poco y nada sobre redes de impedancia. En el presente trabajo, con las soluciones hasta hoy encontradas para redes resistivas, trataremos de llevarlas al dominio de las impedancias. Para esto, dividimos este trabajo en dos partes; la primera estudiar una red resistiva, midiendo su resistencia entre nodos adyacentes y confirmar los resultados con la teoría. La segunda parte es estudiar el mismo experimento pero en una red de impedancia a distintas frecuencias y ver si confirma los resultados con los experimentales de la resistiva.

II) TEORÍA

Consideremos el caso mas simple de medición de la resistencia entre dos nodos adyacentes (0,0) y (0,1) en una red infinita de resistencias R todas iguales, aplicando superposición para simplificar el problema, tenemos que por Kirchoff la corriente que ingresa al nodo (0,0) en una red infinita se reparte como se muestra en la figura 1 en $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 1/4$ de I_0 . Por el nodo (1,0) se extrae la corriente, que por la ley de nodos de Kirchoff, igual al caso anterior es $I_5 = I_8 = I_6 = I_7 = 1/4$ de I_0 . La diferencia de potencial entre los nodos (0,0) y (1,0) es

$$V_{x,y} = (I_1 + I_5) \cdot R = I_{x,y} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot R$$

por la ley de Ohm tenemos
$$R_{x,y} = \frac{V_{x,y}}{I_{x,y}} = \frac{R}{2} \quad (1)$$

En una red infinita, la resistencia equivalente entre dos nodos adyacente es la mitad de R.

El problema se complica, cuando queremos medir los otros nodos, porque hay un desvanecimiento de la corriente a medida que nos alejamos del nodo (0,0)

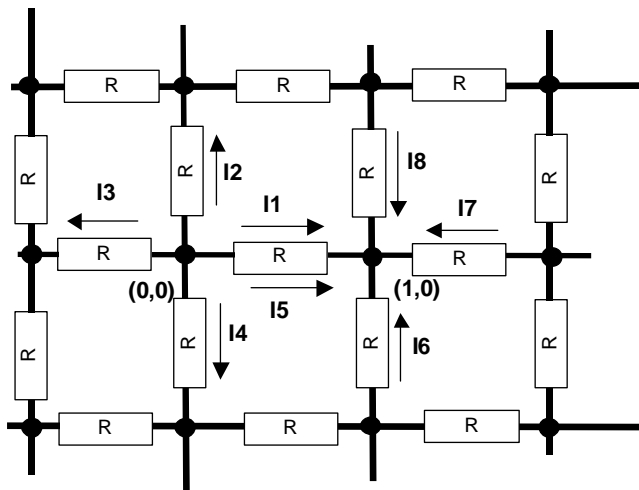


Figura 1) Distribución teórica de la corriente en una red de resistencia en dos dimensiones.

La corriente es ingresada por el nodo (0,0) y esta se distribuye $1/4$ de I_0 por las cuatro resistencias, si extraemos esta corriente por el nodo adyacente, se suma $1/4$ de I_0 de las cuatro resistencias del nodo (1,0).

Este modelo es el utilizado para hallar $R_{x,y}$ como plantea la ecuación 1

Giulio Venezian⁽²⁾ plantea una solución al problema de redes infinita de resistencias en dos dimensiones, él establece que:

$$I_{x,y} = \frac{(V_{x,y} - V_{x,y+1})}{R} + \frac{(V_{x,y} - V_{x,y-1})}{R} + \frac{(V_{x,y} - V_{x+1,y})}{R} + \frac{(V_{x,y} - V_{x-1,y})}{R} \quad (2)$$

como todas las R son idénticas en la red infinita, podemos decir que $R=1\Omega$ sin perder generalidad en la solución, entonces

$$I_{x,y} = 4V_{x,y} - V_{x,y+1} - V_{x,y-1} - V_{x+1,y} - V_{x-1,y} \quad (3)$$

Buscó una representación integral para el potencial en el nodo (x,y) de la forma:

$$V_{x,y} = \int_0^{2\pi} F(\beta) v_{x,y}(\beta) d\beta \quad (4)$$

Continua buscando la solución por separación de variables, considerando que:

$$v_{x,y}(\beta) = e^{ix\alpha + iy\beta} \quad (5)$$

reemplazando este valor en la ecuación 3 tenemos

$$\begin{aligned} I_{x,y} &= 4v_{x,y}(\beta) - v_{x,y+1}(\beta) - v_{x,y-1}(\beta) - v_{x+1,y}(\beta) - v_{x-1,y}(\beta) \\ &= e^{ix\alpha + iy\beta} [4 - e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} - e^{-i\beta} - e^{i\beta}] \\ &= 2e^{ix\alpha + iy\beta} [2 - \cos\alpha - \cos\beta] \end{aligned}$$

Ahora se requiere un α tal que

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \quad (6)$$

Para que la combinación de tensiones v desaparezca. También, encontramos los ceros para esta combinación si $n < 0$ entonces para cualquier función $F(\beta)$ integrable, $I_{x,y} = 0$, a menos que $x=0$.

Para $0 < \beta < 2\pi$ no hay solución real para la ecuación 6, pero existe una solución compleja y es imaginaria pura de la forma:

$$\alpha = i \log \left[2 - \cos\beta + \sqrt{3 - 4\cos\beta + \cos^2\beta} \right] \quad (7)$$

Ahora consideramos el caso de $x=0$, encontramos

$$I_{0,y} = \int_0^{2\pi} d\beta F(\beta) e^{iy\beta} [4 - 2e^{i\alpha} - 2\cos\beta]$$

$$I_{0,y} = 2 \int_0^{2\pi} d\beta F(\beta) e^{iy\beta} [\cos\alpha - e^{i\alpha}]$$

$$I_{0,y} = -2i \int_0^{2\pi} d\beta F(\beta) \sin\alpha \cdot e^{iy\beta}$$

Estas corrientes se pueden interpretar como coeficientes de la serie de Fourier

$$-2iF(\beta)\sin\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{y=-\infty}^{\infty} I_{0,y} \cdot e^{-iy\beta}$$

donde podemos elegir los coeficientes como queramos, especificando $-2iF(\beta)\sin\alpha$. Sean $I_{0,y} = \delta_{0,y}$ tal que $I_{0,0} = 1$ e $I_{0,y} = 0$ si $y \neq 0$. Esto corresponde a la situación de ingresar 1A en el nodo (0,0) y que salga en el infinito condición que hace que ninguna corriente deje la red en ningún otro nodo finito

Con esta elección,

$$F(\beta) = \frac{i}{4\pi \operatorname{sen} \alpha}$$

entonces

$$V_{x,y} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix\alpha + iy\beta}}{\operatorname{sen} \alpha} d\beta \quad (8)$$

La diferencia de potencial entre el origen (0,0) y el nodo (x,y) es $V_{0,0} - V_{x,y}$. Esto no es la resistencia entre estos dos puntos; es en cierta forma la mitad de esta resistencia. Imaginemos por un momento que inyectamos una corriente de 1A en el nodo (x,y), no en el nodo (0,0), permitiendo que salga en el infinito. El nuevo potencial en (x,y) es el que antes llamamos $V_{0,0}$ y el nuevo potencial en (0,0) será por simetría el que antes llamábamos $V_{x,y}$. Evidentemente, ahora la diferencia de potencial entre el origen y (x,y) es igual a la diferencia de potencial anterior cambiada de signo. Nuevamente la diferencia de potencial entre el origen y el nodo (x,y) es $V_{0,0} - V_{x,y}$, igual a como era en su configuración original, cuando inyectamos la corriente por el nodo (0,0).

Como hicimos en la introducción para nodos adyacentes, explotamos la linealidad de la ley de Ohm y superponemos todas las corrientes y potenciales concernientes a la configuración en la cual 1A ingresa por (0,0) y aquellas donde 1A deja la red de resistencia en (x,y). La diferencia de potencial en este caso es $2(V_{0,0} - V_{x,y})$ y por esto igual a $R_{x,y}$

Entonces

$$R_{x,y} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^{ix\alpha + iy\beta})}{\operatorname{sen} \alpha} d\beta \quad (9)$$

Podemos transformar la ecuación 9 en la forma real como

$$R_{x,y} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 - e^{-|x\alpha|} \cdot \cos y\beta)}{\operatorname{senh}|\alpha|} d\beta \quad (10)$$

Tabla 1) Resultados de la ecuación 10 propuesta por Venezian^(2,3) para valores de $R_{x,y}/R$ en el primer cuadrante para valores entre 0 y 5 del par ordenado (x,y).

y=5	$(401/2) - (1880/3\pi)$	$(6646/15\pi) - 140$	$(1/2) + (4/3\pi)$	$(998/35\pi) - 8$	$1/2 + (40/21\pi)$	1126/315π
y=4	$40 - (368/3\pi)$	$(80/\pi) - (49/2)$	$6 - (4/3\pi)$	$(24/5\pi) - 1/2$	352/105π	$1/2 + (40/21\pi)$
y=3	$17/2 - (24/\pi)$	$(46/3\pi) - 4$	$(1/2) + (4/3\pi)$	46/15π	$(24/5\pi) - 1/2$	$(998/35\pi) - 8$
y=2	$2 - (4/\pi)$	$-1/2 + (4/\pi)$	8/3π	$1/2 + (4/3\pi)$	$6 - (4/3\pi)$	$(1/2) + (4/3\pi)$
y=1	$1/2$	2/π	$-1/2 + (4/\pi)$	$(46/3\pi) - 4$	$(80/\pi) - (49/2)$	$(6646/15\pi) - 140$
y=0	0	$1/2$	$2 - (4/\pi)$	$17/2 - (24/\pi)$	$40 - (368/3\pi)$	$(401/2) - (1880/3\pi)$
	x=0	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5

Giulio Venezian termina su estudio, analizando casos especiales de los resultados de la ecuación 10, para valores altos de (x,y) el resultado se hace asintótico a un valor característico de la red de resistencia y es aproximadamente:

$$\frac{R_{x,y}}{R} \approx \frac{1}{2\pi} \ln(x^2 + y^2) + 0,514 \quad (11)$$

Generalizando, en la ecuación 3 se planteó el valor unitario para R con el objeto de simplificar el cálculo haciendo $R_{x,y}/R = 1$, ahora podemos decir que el valor de la resistencia entre dos nodos de una estructura cuadrada en dos dimensiones de resistencias iguales R esta predicho teóricamente por:

$$R_{x,y} = \eta \cdot R \quad (12)$$

donde η que es el coeficiente de escala que tomamos de la tabla 1.

Generalización a una red de impedancias

La primera parte del trabajo es poner a prueba los resultados predicho por la teoría para redes infinitas de resistencia iguales y posteriormente generalizarlo a las impedancias en corrientes alternas.

Para la corriente alterna⁽⁵⁾ tenemos que la diferencia de potencial entre dos nodos adyacentes es:

$$v_{x,y} = V_{x,y} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

y la corriente es de la forma:

$$i_{x,y} = I_{x,y} \cdot \text{sen}(\omega t - \Phi)$$

Haciendo el mismo análisis para la ecuación 1 podemos establecer que la impedancia entre los nodos adyacentes utilizando la ley de Ohm es:

$$Z_{x,y} = \frac{v_{x,y}}{i_{x,y}} = \frac{Z}{2} \quad (13)$$

El problema que plantea trabajar con impedancias, es que son dependientes de la velocidad angular ω y generalizar un resultado como plantea la ecuación 13, obliga por lo menos a medir el valor de las impedancias mas representativas de Z en función de la frecuencia y conservar la relación de 0,5 como se propone.

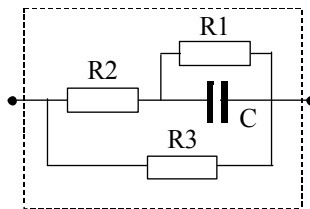
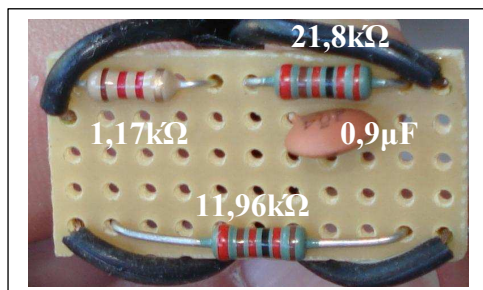


Figura 2) Arreglo de resistencias y capacitor que determinan la impedancia unitaria en la red de impedancias en dos dimensiones. Izquierda, foto de la impedancia y montaje de dispositivos discretos, los valores son proporcionados por tabla 14 apéndice B.

Utilizaremos el arreglo de la figura 2, y tomamos $\tau = R_1 C$.

La impedancia de R_1 en paralelo con C esta dada por:

$$Z_1 = \frac{-j\left(\frac{R_1}{\omega C}\right)}{R_1 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{-j\left(\frac{R_1}{\omega C}\right) \cdot \left(R_1 + j\frac{1}{\omega C}\right)}{R_1^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = \frac{-j\frac{R_1^2}{\omega C} + \frac{R_1}{(\omega C)^2}}{\frac{(\omega C)^2 \cdot R_1^2 + 1}{(\omega C)^2}} = \frac{-jR_1^2\omega C + R_1}{\omega^2\tau^2 + 1}$$

En notación binómica $Z_1 = \frac{R_1}{\omega^2\tau^2 + 1} - j\frac{R_1\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}$ (14)

Hallamos Z_{12} sumando el real R_2

En notación binómica $Z_{12} = \left(R_2 + \frac{R_1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right) - j\frac{R_1\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}$ (15)

Para simplificar el cálculo, hacemos cambio de variable tomando $Z_{12} = a - jb$, donde

$$a = R_2 + \frac{R_1}{\omega^2\tau^2 + 1} \quad \text{y} \quad b = \frac{R_1\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}$$

entonces $Z = \frac{R_3(a - jb)}{R_3 + a + jb} = \frac{(R_3a - jR_3b) \cdot (R_3 + a + jb)}{(R_3 + a)^2 + b^2}$

$$Z = \frac{R_3a(R_3 + a) + jR_3ab - jR_3b(R_3 + a) + R_3b^2}{(R_3 + a)^2 + b^2}$$

La impedancia equivalente es:

$$Z = \frac{aR_3 + a^2 + b^2}{(R_3 + a)^2 + b^2} - j\frac{R_3b}{(R_3 + a)^2 + b^2} \quad (16)$$

Introduciendo nuevamente a y b y reordenando, el módulo y argumento de la impedancia Z es:

$$|Z| = \frac{\sqrt{\left(R_3\left((\omega^2\tau^2 + 1)^2 R_2 R_3 + (\omega^2\tau^2 + 1)R_1 R_3 + ((\omega^2\tau^2 + 1)R_2 + R_1)^2 + (R_1\omega\tau)^2\right)\right)^2 + ((\omega^2\tau^2 + 1)R_1 R_3^2 \omega\tau)^2}}{((\omega^2\tau^2 + 1) \cdot (R_2 + R_3) + R_1)^2 + (R_1\omega\tau)^2} \quad (17)$$

argumento $Arg = \text{tg}^{-1} \frac{R_1 R_3 \omega\tau}{R_1 R_3 + R_2 R_3 (\omega^2\tau^2 + 1) + \frac{((\omega^2\tau^2 + 1)R_2 + R_1)^2 + (R_1\omega\tau)^2}{(\omega^2\tau^2 + 1)}}$ (18)

Con los valores del módulo y el argumento se traza las curvas teóricas de la impedancia como muestra la figura 11. El comportamiento corresponden con el arreglo mostrado en figura 2, ya que para continua el condensador esta abierto y la resistencia equivalente es $R_1 + R_2$ en paralelo con R_3 ,

con $\Phi \approx 0$ por ser resistivo puro. En frecuencias próxima a los 10 kHz el condensador se comporta con impedancia despreciable frente a R_1 , lo pone en corto y la impedancia esta determinada por el paralelo R_2 con R_3 , nuevamente $\Phi \approx 0$

La frecuencia para el máximo argumento de la impedancia es dado por $\frac{d\phi}{df} = 0$

En la planilla de cálculo utilizada para trazar el valor teórico de la figura 11, se realizó la derivada y el valor cero corresponde a una frecuencia de 580 Hz.

Los valores de las impedancias que pondremos a prueba en el modelo son a frecuencia de: 0Hz, 100Hz, 400Hz, 500Hz, 900 Hz y 1200 Hz, con objeto de obtener valores a ambos lados del máximo defasaje de la corriente con la tensión.

III) EXPERIMENTO

Etapa 1) El trabajo de laboratorio consiste en poner a prueba la ecuación 10 en una red finita de resistencias en 2 dimensiones comparando el resultado experimental de la red con los resultados predichos por la teoría en tabla 1.

Etapa 2) Posteriormente medimos experimentalmente una red de impedancia y la compararemos con los resultados predichos por la teoría, tal como se comportó la resistiva, con el fin de buscar una generalización de las redes resistivas infinitas al dominio de las redes de impedancias.

Utilizaremos las ecuaciones 17 y 18 para determinar el comportamiento teórico de la impedancia, por otro lado utilizando el arreglo de instrumentos indicados en la figura 5 hallaremos la impedancia en diferentes frecuencias y verificaremos la ecuación 13 para nodos adyacentes.

Red de resistencia en 2D.

Para el experimento, utilizamos una red resistiva de 11 por 11 nodos con un total de 220 resistencias de 1000 ± 50 Ohms, y potencia máxima de disipación de 250 mW.

Las mismas están montadas y soldadas a un circuito impreso de 120 por 120 mm que forman una malla cuadrada con nodos separados 10 mm y elevados 10 mm de la placa permitiendo el fácil acceso de las puntas de medición. La red así construida, forman un sistema robusto, reduce el error por falsos contactos y facilita la repetición de medidas y resultados.

Para la medición se utilizó un tester TO BAX mod. M890G, con precisión de 1,2% en la medición de resistencia.

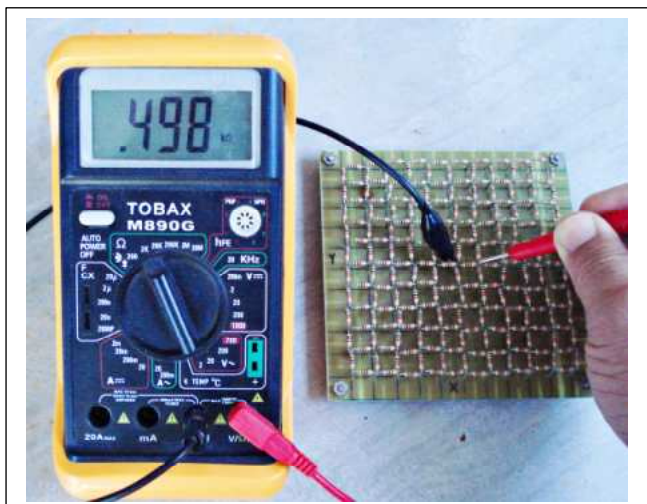


Figura 3) Foto que muestra un momento de la medición, donde se mide el segmento adyacente de la red resistiva de 11 por 11 nodos entre (0,0) y (1,0).

El tester esta indicando el valor de 0,498 kΩ muy cerca del valor predicho por la ecuación 10 de 0,5 kΩ.

(ver también la tabla 1 en $x=1$ y $y=0$).

Red de impedancia en 2D.

Se construyó una impedancia como muestra la foto de la figura 2, con idénticos componentes a los utilizados en la red de impedancias, esta tiene la función de medición de valor de referencia y calibración para cada una de las frecuencias a medir.

Componente y unidad	Valor	Error	ϵ_r
R_1 en kOhms	21,8	$\pm 0,3$	1,2%
R_2 en kOhms	1,17	$\pm 0,01$	1,2%
R_3 en kOhms	11,96	$\pm 0,18$	1,5%
C en uF (10^{-6} F)	0,90	$\pm 0,03$	3%

Tabla 2) Valores de los componentes utilizados para el armado de la impedancia de prueba y de la red de impedancias figura 4

Para la medición de los componentes indicados en tabla 2. se utilizó el mismo tester que midió la malla resistiva con precisión de 1,2% en resistencia y 3% para la medición de capacitancia, los valores indicados son extraídos del apéndice B, tabla 14.

También se construyó una red de impedancias de 7 por 7 nodos y 84 elementos montados y soldados a una placa aislante 250mm por 250mm que forman una malla cuadrada con nodos separados 30 mm y elevados 10 mm de la placa base permitiendo el fácil acceso de las puntas de medición. La placa con la red de impedancia posteriormente se montó en una caja protectora de 260mm por 260mm se adicionaron dos conectores hembras de 3mm tipo banana a dos pinzas cocodrilo con el fin de asegurar una conexión fija con los instrumentos de medición ya que se hace a 5 frecuencias diferentes y el proceso de medición es un poco mas prolongado. También, las pinzas facilitan la selección de todos los nodos de la red bajo medición, con bajo error sistemático.

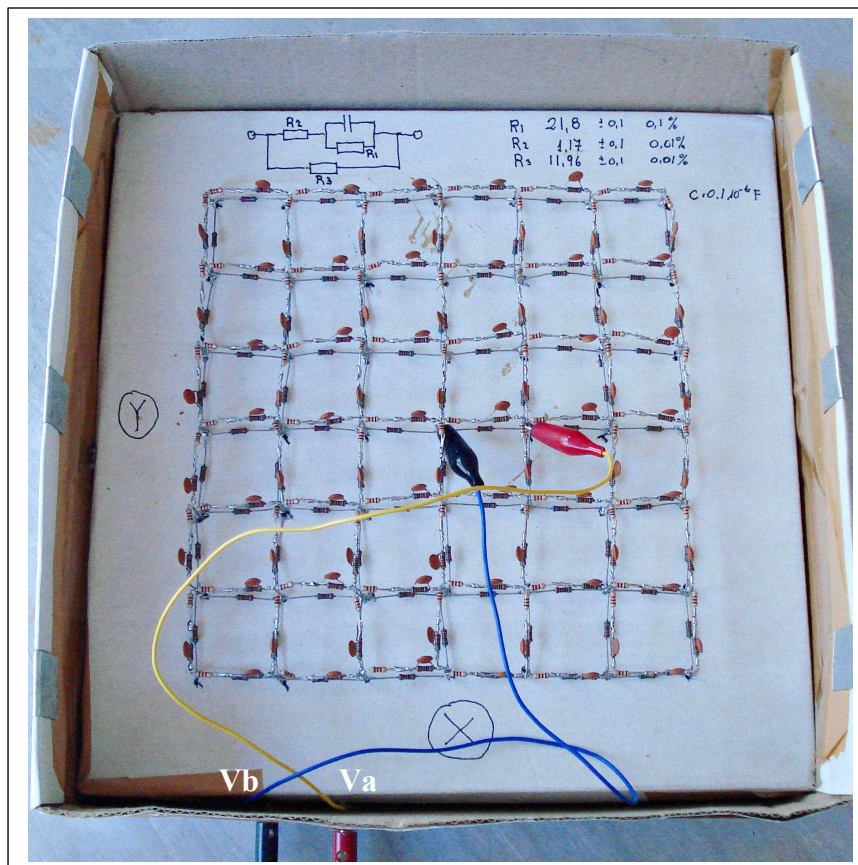


Figura 4) La foto muestra la red de impedancias de 7 por 7 nodos donde se realizaron las mediciones de impedancia. Las pinzas cocodrilo están en posición de medir la impedancia adyacente o side entre los nodos (0,0) y (1,0).

El arreglo que muestra la figura 5 es conectado a las fichas rotuladas Va y Vb para medir la impedancia entre los nodos donde se fijan las pinzas cocodrilo.

Para las mediciones se utilizó un generador de funciones GW model GFG 8016G y un recolector de datos de tres canales MULTIPOURPOSE LAB INTERFACE VERNIER conectado a una PC donde se almacenaron los datos de medición, como muestra el arreglo de la figura 5. La resistencia de 100Ω es utilizada para el sensado de corriente a través de la impedancia

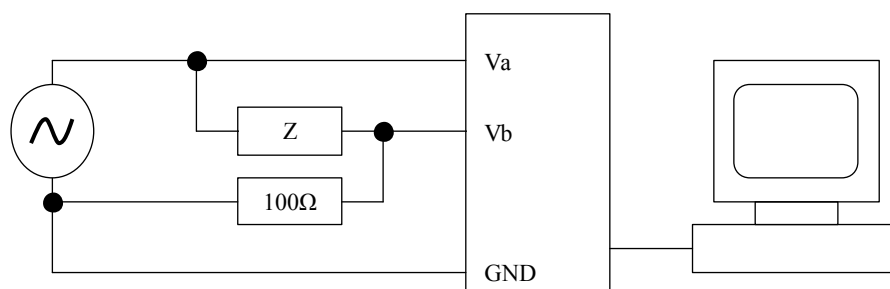


Figura 5) Arreglo utilizado para la medición de impedancia, compuesto por un generador de funciones, una resistencia de 100Ω para medición de la corriente y el sistema de recolección de datos.

Para obtener el valor de Z aplicamos el método de fasores propuesto en Resnick⁽⁵⁾ y la Ley de Ohm

Por la Ley de Ohm sabemos: $Z = \frac{v}{i}$

entonces:

$$Z = \frac{(Va - Vb) \cdot \cos(\omega t - \phi) + j(Va - Vb) \cdot \text{sen}(\omega t - \phi)}{(Vb/100) \cdot \cos(\omega t) + j(Vb/100) \cdot \text{sen}(\omega t)} \quad (20)$$

La figura 7 muestra como se obtienen los datos que alimentan la ecuación 20 y 21 para obtener la impedancia.

La diferencia de fase esta dada por:

$$\phi = \text{sen}^{-1}\left(\frac{v}{(Va - Vb)}\right) \quad (21)$$

Los datos recolectados se cargaron en una planilla Excel donde se ingresaron las ecuaciones 20 y 21 para facilitar el cálculo de la impedancia a diferentes frecuencias

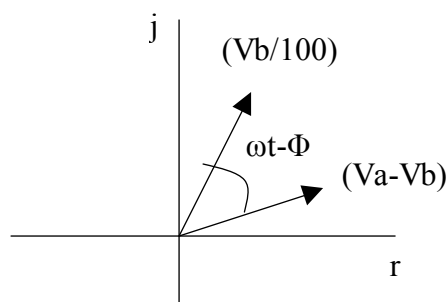


Figura 6) Diagrama de fasores que representan la corriente alterna en la impedancia

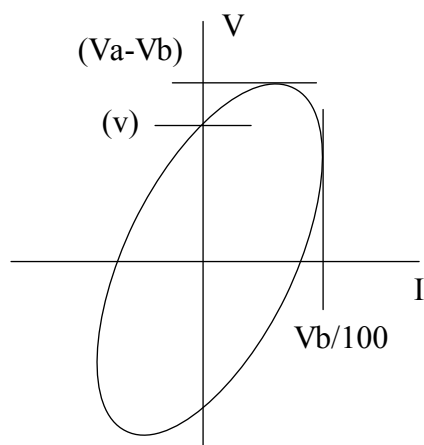


Figura 7) Gráfico obtenido por el sistema de adquisición de datos donde se muestra la tensión en función de la corriente.

IV) RESULTADOS.

Mediciones sobre la red de resistencia de 11 por 11 nodos.

Para la medición de la red de resistencias de 11 por 11 nodos, fijamos el común del ohmetro en el centro de la estructura (0,0) y se midió la resistencia de todos los nodos restante (x,y).

Los resultados de la medición se muestran en la figura 8. La primera observación es que el coeficiente de la línea de tendencia propuesto por Venezian⁽²⁾ en la ecuación 11 es $1/2\pi$, y para la línea de tendencia mostrada en la figura 8 es de $1/\pi$, esto se debe a que la ecuación de Venezian trata la distancia al centro como:

$$d^2 = x^2 + y^2$$

y para nuestros datos es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La diferencia hace que el coeficiente de la línea de tendencia en nuestros datos sea el doble a la propuesta por la ecuación 11. Aun así, es solo como hacemos referencia de la distancia al centro y no afecta para nada los resultados de la medición.

En la figura 8, observamos que hasta el segmento “double side”⁽⁴⁾ (ver también tabla 3), desde el nodo (0,0) a los nodos (0,2), (2,0), (0,-2) y (-2,0), con una incertidumbre en la medición del 1,5%, la red de 11 por 11 nodos se comporta según predice la ecuación 10. Otra observación que valida el resultado, es que para los segmentos diagonal desde el centro (0,0) a los nodos (1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1) Venezian⁽²⁾ la trata como caso particular que esta por encima de la línea de tendencia asintótica de la ecuación 10, y en el figura 8 se observa que el valor medido y predicho también están por encima. Lo mismo pasa para los nodos adyacentes (d=1) que medido y predicho están por debajo a la línea de tendencia del valor teórico indicado con cruz.

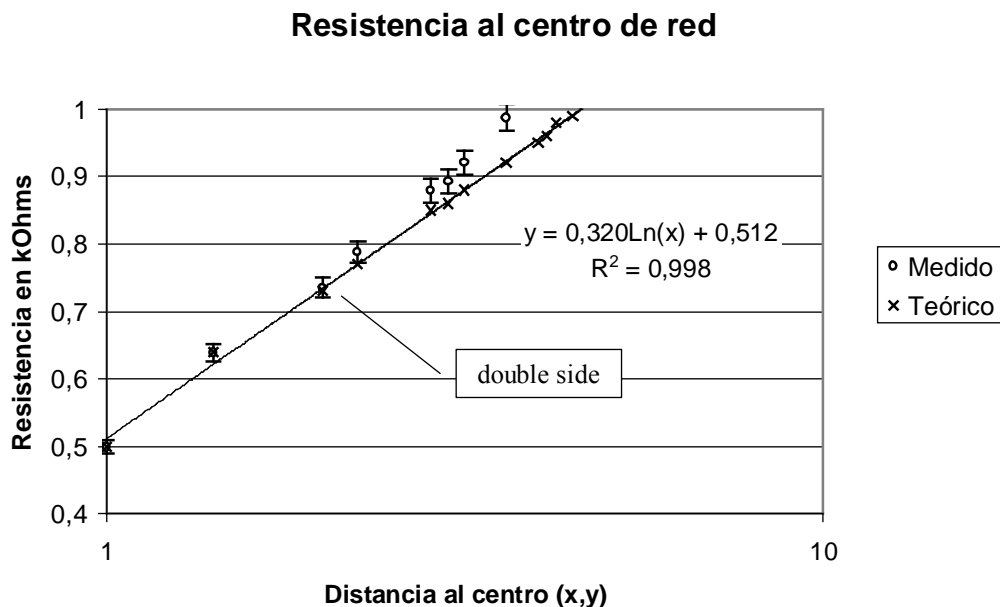


Figura 8) Medición de la resistencia desde un nodo (x,y) al centro (0,0) en una estructura resistiva de 11 por 11 nodos formadas por resistencias 1 kΩ. Se adiciona la recta de tendencia ecuación 11 que aproxima a los valores predicho por la ecuación 10 para redes resistivas infinitas en dos dimensiones.

Para la distancia $d=\sqrt{5}$, que son los segmentos desde (0,0) a los nodos (1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2), (2,1), (2,-1), (-2,1), (-2,-1) también conocida como “knight’s move”⁽⁴⁾ o movimiento del caballo en adelante (ver tabla 3), se observa que los resultados de la medición de la resistencia entre los nodos (0,0) a (x,y) comienzan a dar por encima de los valores predicho por la teoría.

Estos resultados se muestran en la figura 9 donde vemos que la desviación entre el medido y predicho sigue una tendencia exponencial a medida que nos acercamos al borde de la red de resistencias. Este aumento, es causado por el efecto del borde⁽⁴⁾ en redes finitas ya que al acercarnos al borde la corriente tiene menos caminos, aumentando la corriente que pasa por las resistencias del borde, esto hace que aumente la caída de potencial y aumente el potencial distribuido sobre el borde, dando como resultado un aumento de la resistencia medida por encima de la resistencia teórica en una red infinita.

Este efecto lo podemos ver mejor en la figura 10, donde muestra los potenciales sobre todos los nodos de la red resistiva de 11 por 11 al ingresar la corriente del ohmetro para medir la resistencia.

En el gráfico 10a corresponde a la medición de la resistencia entre los nodos (0,0) y (2,0) que da como resultado 734Ω y esta corresponde con lo predicho por la ecuación 10, vemos que los bordes no afectan tanto la medición, pero para la medición de la resistencia entre los nodos (0,0) y (4,0) que da como resultado 1032Ω como muestra el gráfico 10b, los potenciales sobre el puntero del ohmetro ubicado a la derecha (cerca del borde) sí hay un aumento de potencial en los nodos vecinos al terminal, este aumento hace que la resistencia medida sea mayor por este efecto del borde y sigue una tendencia exponencial a medida que nos acercamos al borde como se muestra en la figura 9. La tabla 5 del apéndice A, muestra la desviación entre el medido y el teórico.




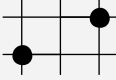
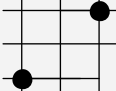

Segmento de valor singular		Valor teórico kOhms	Valor medido kOhms	Confirma ecuación 10
	Side Lado	$1/2 = 0,5$	$0,5 \pm 0,01$	Si
	Diagonal	$2/\pi \approx 0,64$	$0,64 \pm 0,01$	Si
	Double side Doble lado	$2 - (4/\pi) \approx 0,73$	$0,74 \pm 0,01$	Si
	Knight's move Movimiento del caballo	$(4/\pi) - 1/2 \approx 0,77$	$0,79 \pm 0,01$	No
	Double diagonal Doble diagonal	$8/3\pi \approx 0,85$	$0,88 \pm 0,01$	No
	Triple side Triple lado	$17/2 - (24/\pi) \approx 0,86$	$0,89 \pm 0,01$	No

Tabla 3) Valores de la resistencia de la red resistiva de 11 por 11 nodos en los segmentos mas representativos. El valor medido y el teórico dado por la ecuación 10 (también aproximado para facilitar la comparación) son cruzados en la última columna, que indica si el valor experimental confirma el valor teórico. Podemos decir que hasta el segmento double side confirmó la teoría para una incertidumbre del 1,5% en la medición.

Desviación respecto al teorico

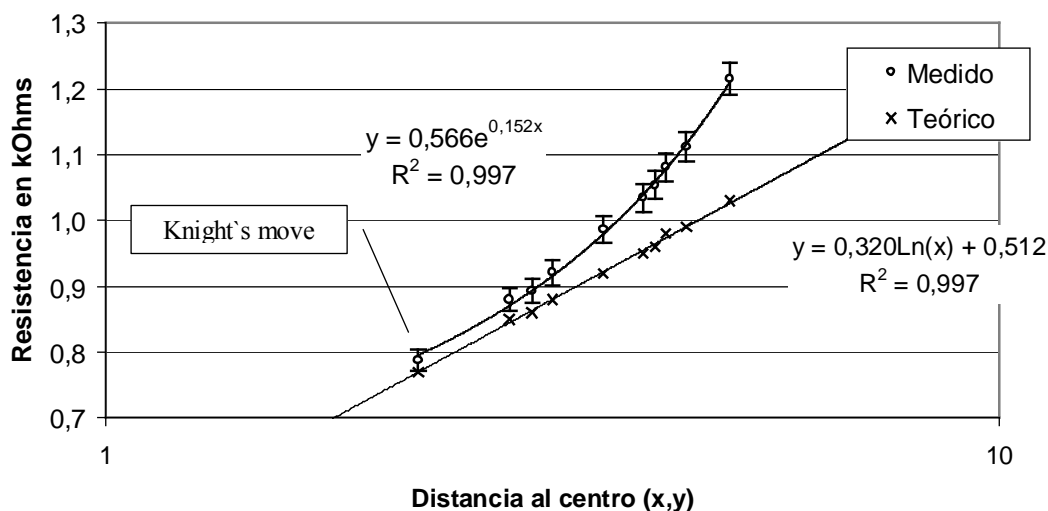
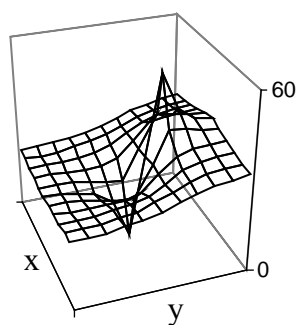


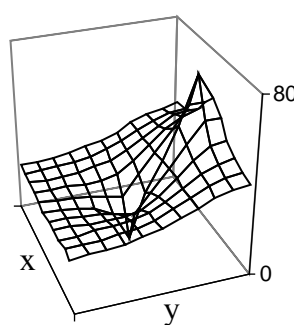
Figura 9) El gráfico muestra el efecto del borde en una red de resistencias finita. Al acercarnos al borde la corriente tiene menos caminos, aumentando la corriente que pasa por las resistencias. Este aumento de la corriente produce mayor caída de potencial y la consecuencia es una mayor resistencia a una red infinita donde no está el efecto de borde.

734 Ohms nodos (0,0), (2,0)



10a

1032 Ohms nodos (0,0), (4,0)



10b

Figura 10) Los gráficos muestran como se distribuye el potencial sobre la red resistiva de 11 por 11 nodos cuando conectamos el ohmetro para medir la resistencia.

El gráfico 10a es la medición de 734 Ω y corresponde a lo predicho por la ecuación 10 para el valor de $R_{x,y}$.

El gráfico 10b corresponde a una medición donde el efecto de borde produce una mayor resistencia que la saca de la línea de tendencia como se gráfica en la figura 9.

Mediciones sobre la red de impedancias de 7 por 7 nodos.

Para generalizar la teoría a las redes de impedancia, utilizando la red de la figura 4, realizamos mediciones en continua y a la frecuencia de 100Hz, 400Hz, 500Hz , 900Hz y 1200Hz

Hz	Módulo			Argumento		
	kOhms	Error	ϵ_r	grados	Error	ϵ_r
0	7,87	$\pm 0,09$	1,2%			
100	7,11	$\pm 0,21$	3%	-22	± 1	3%
400	3,80	$\pm 0,08$	2%	-48	± 2	2%
506	3,20	$\pm 0,09$	3%	-49	± 2	2%
906	2,09	$\pm 0,04$	2%	-47	± 2	2%
1201	1,75	$\pm 0,05$	3%	-44	± 2	3%

Tabla 4) Valores de la impedancias aisladas de la red medida a diferentes frecuencias, estos valores son trasladados al gráfico de la figura 11.

La figura 11 muestra el trazado de los valores numéricos obtenido al aplicar las ecuaciones 17 y 18 un barrido de 1Hz a 10Kz, estas valores teóricos salen de aplicar la definición de resistencias series y paralelas a los circuitos de corriente alterna⁽⁵⁾ como vimos en II TEORÍA.

En el gráfico de la figura 11, en continua y para las frecuencias de 100Hz, 400Hz, 500Hz, 900Hz y 1200Hz podemos asegurar que con los valores de incertidumbre del 3% en la medición, dieron valores según lo predice la teoría para la impedancia a estas frecuencias.

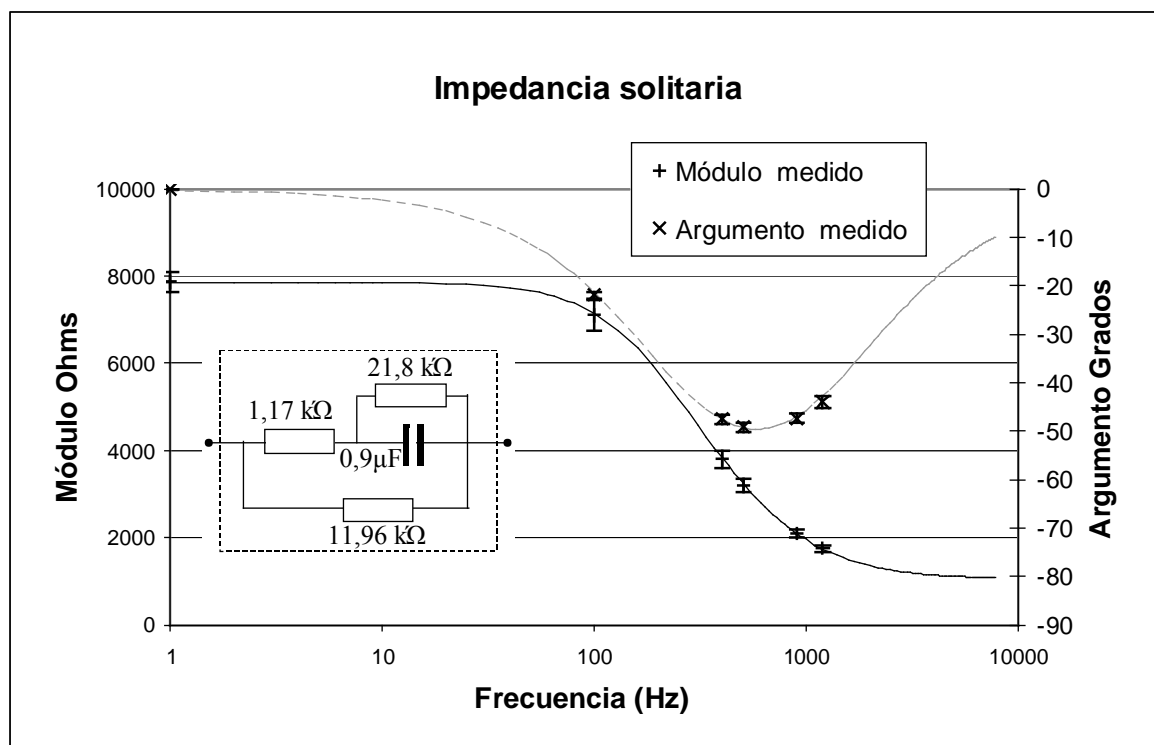


Figura 11) Las curvas representan el valor calculado para el módulo y argumento de la impedancia, utilizada en las pruebas en función de la frecuencia, hasta los 10 kHz. El gráfico también muestra el valor de las seis mediciones realizada sobre la impedancia aislada de la red, foto en figura 2, que fue utilizado para obtener el Z inicial en las diferentes frecuencias .

Para las mediciones de la red de impedancia de 7 por 7 nodos, se utilizó el mismo procedimiento para la red resistiva de 11 por 11 nodos.

Fijando un terminal de medición en el centro de la red cuadrada (0,0), se midieron la impedancia de los nodos (x,y) en las frecuencias de 100Hz, 400Hz, 500Hz, 900Hz y 1200Hz. Por ser una red mucho mas pequeña en la cantidad de elementos, solo 84 contra los 220 elementos de la resistiva pura, se gráfica solo 2 distancias al centro como muestra la figura 12.

Los valores predichos por la teoría indicados en el gráfico de la figura 12 están unidos por punteado para identificarlos y salen de aplicar al valor calculado utilizando la ecuación 17 que determina el módulo de la impedancia, la ecuación 12 que predice el valor de la impedancia entre dos nodos que para la corriente alterna es:

$$Z_{xy} = \eta \cdot Z$$

Se observa que para los valores de impedancia del segmento side con una incertidumbre en la medición del 3%, todas las mediciones en las cinco frecuencias, se encuentran por encima de lo predicho por la teoría, incluso el medido con el ohmetro indicado como frecuencia de 0Hz.

Se realizó también las mediciones sobre la diagonal con similar resultado.

El argumento de la impedancia a igual frecuencia para la medición del segmento side y diagonal, no mostró cambios observables para el 3% de incertidumbre en la medición..

No se trató una nueva medición con menor error porque la red no cumple con el valor numérico del módulo para confirmar la ecuación 10 y mejorar la medición carece por ahora de significado.

Impedancia - Teórica - Medida

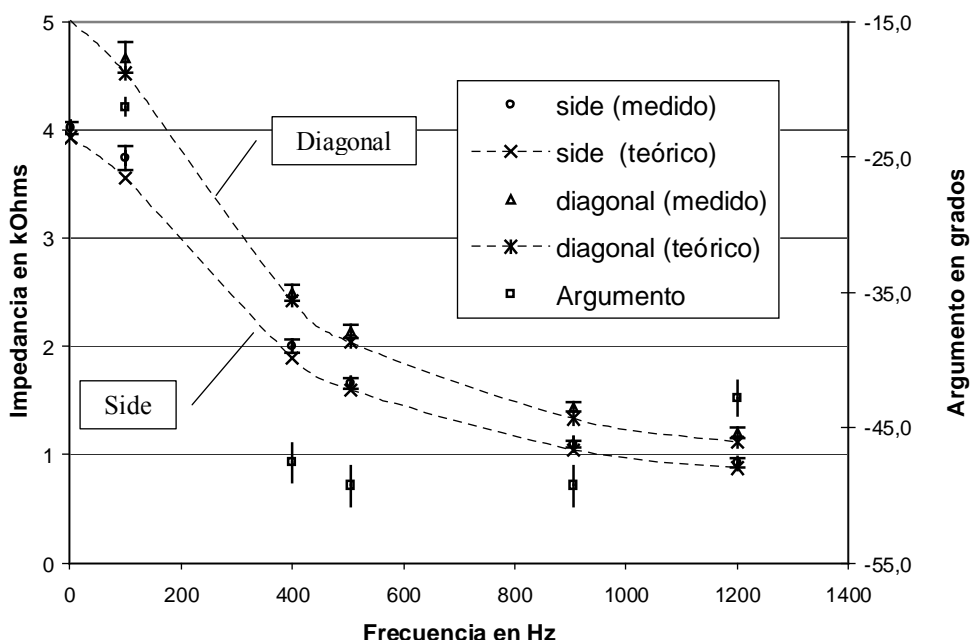


Figura 12) Medición en diferentes frecuencias de la impedancia desde un nodo (x,y) al centro de la estructura cuadrada de impedancias de 7 por 7 nodos. Los valores unidos por el punteado, representan el valor predicho por la ecuación 10 para redes infinitas en dos dimensiones.

Módulo de impedancia corregido

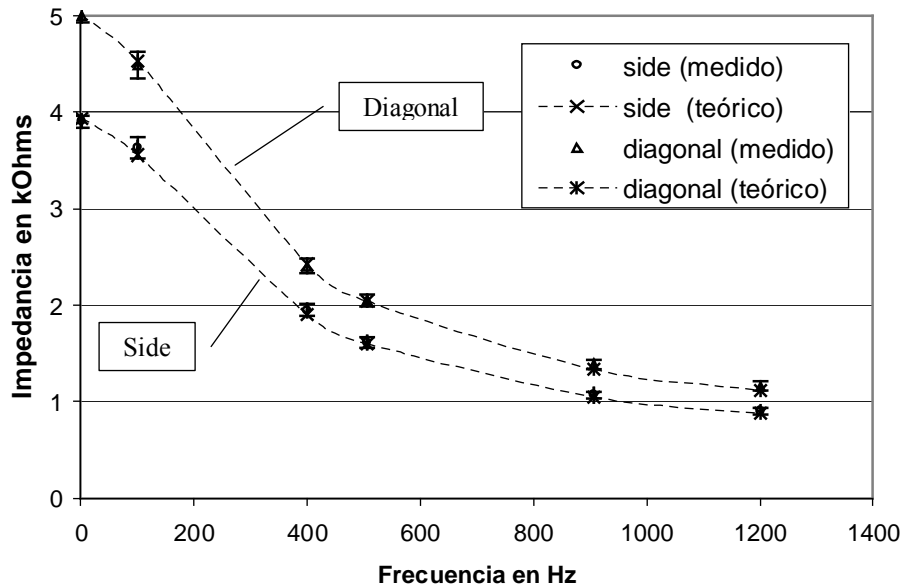


Figura 13) Impedancia corregida por un valor xi de $\xi = 0,96$ para el segmento side y diagonal, en este caso los valores medidos confirman la teoría.

Introducimos un factor de corrección ξ que permita aproximar los resultados experimentales con la teoría. Este factor es un numero que multiplica el valor del módulo medido para un segmento singular a todas las frecuencias, haciendo que el error cuadrático medio sea mínimo.

Este factor de corrección aplicado en la ecuación 12 queda como:

$$Z_{x,y} \cdot \xi = \eta \cdot Z \quad (22)$$

Para el segmento adyacente con $\xi = 0,96$ cumple con lo predicho por la ecuación 13 para todo el rango de frecuencias .

$$Z_{x,y} \cdot \xi \approx \frac{Z}{2} \quad \left(0 \leq \frac{\omega}{2\pi} \leq 1200\text{Hz} \right) \quad (23)$$

Para el caso del segmento diagonal nodos (0,0) a (1,1) utilizando $\xi = 0,96$ también puso los valores medidos dentro de lo predicho por la ecuación 10 para todas las frecuencias medidas.

Estos resultados están indicando que la impedancia para una incertidumbre de 3% en la medición, mantiene la relación en todo el rango de frecuencias de la forma:

$$\frac{Z_{x,y}}{Z} \approx \frac{\eta}{\xi} \quad \left(0 \leq \frac{\omega}{2\pi} \leq 1200\text{Hz} \right) \quad (24)$$

V) CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos experimentalmente sobre la red resistiva de 11 por 11 nodos, hasta una distancia al centro de double side, confirmaron numéricamente los datos predichos por la ecuación 10 propuesta para hallar la resistencia equivalente entre dos nodos..

En el caso de la red de impedancia de 7 por 7 nodos directamente ningún valor confirmó la teoría, no fue el método de medición, porque bajar la incertidumbre nos alejaría más de los valores predicho por la teoría, sí una posible causa sea las pequeña cantidad de elementos que la alejan de simular una red infinita en la medición de los nodos adyacentes.

A partir del knight`s move o movimiento del caballo en adelante, la red resistiva se comportó como una red finita, mostrando un aumento exponencial de la resistencia a medida que nos acercamos al borde, efecto que se debe a la disminución de caminos que encuentra la corriente cerca del borde, esto hace aumentar la distribución del potencial en los nodos cerca del borde, generando la desviación mostrada en el gráfico 9.

Para el cálculo de la impedancia, se utilizó la misma definición de circuitos serie y paralelo utilizados en corriente continua aplicando Kirchhoff y ley de Ohm, pero aplicados a corriente alterna utilizando números complejos. Los resultados en la figura 11, confirmó que los valores medidos coinciden con los valores calculados, indicando la valides de la ley de Kirchhoff y Ohm también en corrientes alternas.

Aunque el valor de impedancia medido entre nodos adyacentes se aproximó al calculado, no se pudo confirmar que el método que trata la resistencia entre dos nodos de una red infinita se pueda generalizar a la medición de impedancia entre dos nodos de una red infinita de impedancias.

Una posible causa puede ser la baja cantidad de elementos de la red de impedancia, dejando abierta la interrogante, y la necesidad a futuro de armar una red de impedancia de 11 por 11 nodos, que sabemos, sí confirma el modelo para redes resistivas infinitas.

Si podemos decir con los datos que tenemos para las redes de impedancia, que la relación que existe entre la impedancia medida entre nodos adyacentes y la impedancia aislada se mantiene constante para todo el rango de frecuencias y es igual a el coeficiente de escala de la tabla 1 dividido el factor de corrección como muestra la ecuación 24.

Queda como tarea de una próxima medición con mayor cantidad de nodos y menor incertidumbre, estudiar si el efecto borde modifica a este factor de corrección ξ ..

AGRADECIMIENTO

Al Dr. Salvador Gil, que facilitó el uso del laboratorio de física de la UNSAM, a sus críticas constructivas y útiles recomendaciones para la presentación del trabajo. También, al encargado de laboratorio por la buena predisposición y colaboración durante las pruebas.

BIBLIOGRAFÍA

- ⁽¹⁾Leo Lavatelli, *The Resistive Net and Finite Difference Equations*, Department of Physics, University of Illinois, 61801, March 1972.
- ⁽²⁾Giulio Venezian, *On the resistance between two points on a grid*, Physics Department, Southeast Missouri State University, Missouri 63701 June 1994
- ⁽³⁾D. Atkinson and F.J Steenwijk, *Infinite resistive lattices*, Physics Department, University of Groningen, Nijenborgh 4, NL-9747 AG
- ⁽⁴⁾Bruce Denardo, *Experiments with electrical resistive networks*, Physics Department, Naval Postgraduate School, Monterey, California 93943
- ⁽⁵⁾Resnick, Halliday and Krane, *Física Vol.2 Versión Ampliada*, cuarta edición Editado por Compañía Editorial Continental SA de CV México. p. 141-151, 280-287
- ⁽⁶⁾Cserti, Dávid and Piróth, *Perturbation of infinite networks of resistors*, Department of Physics of Complex Systems, Eotvos University H1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A, Hungary.

CONTACTO

^(a) email: nelson.canepa@gmail.com

PALABRAS CLAVE, KEYWORDS

Resistive network, resistive square grid, resistive lattices, infinite resistive network, impedance between adjacent nodes, resistance between two points on a grid.

APÉNDICE A) Resultados del experimento con la red resistiva de 11 por 11 nodos.

Tabla 5) Valores de resistencia en $k\Omega$ medidos en el segmento d , en la red de 11 por 11 nodos donde muestra la desviación respecto a una red de infinitos nodos. Los datos son usados para construir los gráficos de la figura 8 y 9.

Distancia al (0,0) $d = \sqrt{x^2 + y^2}$	Cantidad de nodos de igual d	Valor medido $k\Omega$	Error	Teórico ecuación 10 $k\Omega$	Desviación respecto al teórico
1,00	4	0,499	$\pm 0,007$	0,50	-0,25%
1,41	4	0,639	$\pm 0,010$	0,64	-0,20%
2,00	4	0,735	$\pm 0,011$	0,73	0,72%
2,24	8	0,788	$\pm 0,012$	0,77	2,29%
2,83	4	0,880	$\pm 0,013$	0,85	3,50%
3,00	4	0,893	$\pm 0,013$	0,86	3,78%
3,16	8	0,921	$\pm 0,014$	0,88	4,61%
3,61	8	0,987	$\pm 0,015$	0,92	7,27%
4,00	4	1,034	$\pm 0,016$	0,95	8,84%
4,12	8	1,054	$\pm 0,016$	0,96	9,77%
4,24	4	1,081	$\pm 0,016$	0,98	10,31%
4,47	8	1,112	$\pm 0,017$	0,99	12,27%
5,00	12	1,215	$\pm 0,018$	1,03	17,94%

Tabla 6) Valores de tensión en mV de la red de 11 por 11 nodos en la medición doble lado correspondiente a la figura 10a

y=C1	21,3	21,1	20,8	20,2	20	19,8	20	20,3	20,7	21,1	21,3
y=9	21,5	21,3	20,7	20,2	19,8	19,5	19,8	20,3	20,8	21,3	21,5
y=8	21,9	21,6	20,9	20,1	19,3	18,8	19,3	20,2	21	21,6	21,9
y=7	22,6	22,3	21,3	20	18,4	17,1	18,4	20,1	21,4	22,3	22,7
y=6	23,8	23,4	22,3	20,4	17	12,8	17	20,4	22,4	23,4	23,8
y=5	25,3	25	24,2	22,1	16,6	0	16,6	22,1	24,2	25	25,4
y=4	27,2	27,2	27,2	27,3	27,4	27,4	27,4	27,4	27,3	27,3	27,2
y=3	29,1	29,4	30,3	32,5	38,1	54,8	38,1	32,5	30,4	29,4	29,1
y=2	30,5	31	32,1	34,3	37,7	42,1	37,8	34,3	32,2	31,1	30,6
y=1	31,4	32	33	34,6	36,6	38	36,6	34,7	33,1	32	31,5
y=0	32	32,3	33,4	34,7	36	36,6	36	34,7	33,4	32,5	32
	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6	x=7	x=8	x=9	x=10	x=C1

Tabla 7) Valores de tensión en mV de la red de 11 por 11 nodos en la medición cuadruple lado correspondiente a la figura 10b

y=C1	23,1	22,9	22,5	22	21,5	21,4	21,5	22	22,5	22,9	23,1
y=9	23,4	23,1	22,6	21,9	21,3	21	21,3	21,9	22,5	23,1	23,4
y=8	23,9	23,5	22,8	21,8	20,7	20,2	20,7	21,7	22,8	23,5	23,9
y=7	24,9	24,3	23,2	21,6	19,6	18,2	19,6	21,6	23,2	24,3	24,9
y=6	26,4	25,7	24,3	21,8	17,9	13,5	17,9	21,7	24,3	25,7	26,3
y=5	28,5	27,9	26,4	23,3	16,7	0	16,6	23,3	26,4	27,8	28,4
y=4	31,2	30,9	30,1	28,5	25,5	21,7	25,6	28,5	30,1	30,9	31,2
y=3	34,2	34,4	34,6	35	35,2	35,4	35,3	35	34,6	34,3	34,2
y=2	37,1	37,7	39,1	41,5	45,2	49,3	45,1	41,5	39,1	37,7	37
y=1	39,3	40,4	42,7	45,8	54,5	71,8	54,5	46,7	42,6	40,3	39,3
y=0	40,5	41,7	44,3	48,5	54,4	60,1	54,4	48,4	44,2	41,7	40,5
	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6	x=7	x=8	x=9	x=10	x=C1

APÉNDICE B) Resultados del experimento con la red de impedancia de 7 por 7 nodos.

General para las tablas de 8 a 13.

Valores de impedancia en la red de 7 por 7 nodos. En gris el teórico dado por la ecuación 17 y medido de la impedancia aislada, el resto corresponde a los segmentos mas representativos de distancia al centro de la red. La columna teórico tienen valor dado por la tabla 1 y plicando el factor de escala de la ecuación 12 y la última la desviación de la medida respecto al teórico.

Los argumentos para cada frecuencia no mostraron variación al cambiar la distancia al centro, se indica el medico como media de todos los argumentos para la misma frecuencia y como error la desviación estándar. El teórico es el calculado por la ecuación 18.

La información de las tablas es la utilizada para graficar los valores medidos en las figuras 12 y 13

Tabla 8) Mediciones en continua, medidos con tester.

Condición	Cantidad de nodos de igual d	Valor medido k Ω	Error	ϵ_r	Teórico k Ω	Desviación respecto al teórico
Z - ecuación 17	-	7,86	$\pm 0,03$	0,4%		-
Z - Medido	-	7,87	$\pm 0,09$	1,2%		0,06%
d=1 (side)	4	4,02	$\pm 0,06$	1,5%	3,94	2,22%
d=1,41 (diagonal)	4	5,21	$\pm 0,06$	1,2%	5,01	3,94%
d=2 (Double side)	4	6,12	$\pm 0,07$	1,2%	5,72	6,91%
d=2,24 (Knight's move)	8	6,65	$\pm 0,08$	1,2%	6,09	9,22%
Argumento de Z	-	0,0	$\pm 0,0$	0,0%	0,0	0,00%

Tabla 9) Mediciones en 100 Hz con el arreglo mostrado en figura 3

Condición	Cantidad de nodos de igual d	Valor medido kΩ	Error	ϵ_r	Teórico kΩ	Desviación respecto al teórico
Z - ecuación 17	-	7,15	±0,01	0,2%		-
Z - Medido	-	7,11	±0,21	3,0%		0,60%
d=1 (side)	4	3,74	±0,11	3,0%	3,55	5,35%
d=1,41 (diagonal)	4	4,67	±0,14	3,0%	4,52	3,23%
d=2 (Double side)	4	5,66	±0,17	3,0%	5,17	9,51%
d=2,24 (Knight's move)	8	5,98	±0,18	3,0%	5,50	8,75%
Argumento de Z	-	-21,8	±0,7	3,0%	-21,3	2,96%

Tabla 10) Mediciones en 400Hz con el arreglo mostrado en figura 3

Condición	Cantidad de nodos de igual d	Valor medido kΩ	Error	ϵ_r	Teórico kΩ	Desviación respecto al teórico
Z - ecuación 17	-	3,85	±0,03	0,7%		-
Z - Medido	-	3,80	±0,08	2,0%		1,31%
d=1 (side)	4	2,01	±0,04	2,0%	1,90	5,57%
d=1,41 (diagonal)	4	2,50	±0,05	2,0%	2,42	3,34%
d=2 (Double side)	4	2,94	±0,06	2,0%	2,76	6,61%
d=2,24 (Knight's move)	8	3,14	±0,06	2,0%	2,94	6,96%
Argumento de Z	-	-47,7	±0,7	1,4%	-47,6	0,10%

Tabla 11) Mediciones en 506Hz con el arreglo mostrado en figura 3

Condición	Cantidad de nodos de igual d	Valor medido kΩ	Error	ϵ_r	Teórico kΩ	Desviación respecto al teórico
Z - ecuación 17	-	3,24	±0,02	0,7%		-
Z - Medido	-	3,20	±0,09	3,0%		1,15%
d=1 (side)	4	1,66	±0,03	2,0%	1,60	3,83%
d=1,41 (diagonal)	4	2,14	±0,04	2,0%	2,04	4,89%
d=2 (Double side)	4	2,46	±0,05	2,0%	2,33	5,98%
d=2,24 (Knight's move)	8	2,70	±0,05	2,0%	2,47	9,13%
Argumento de Z	-	-49,2	±0,7	1,5%	-49,3	0,25%

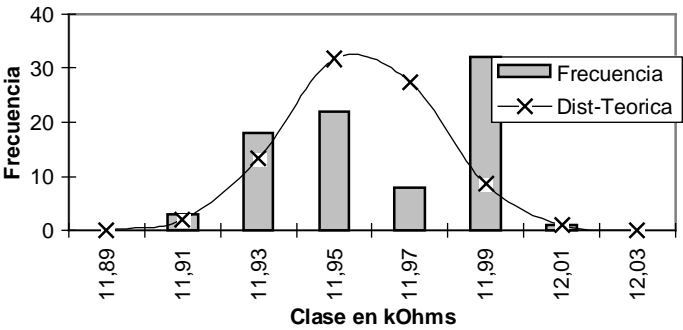
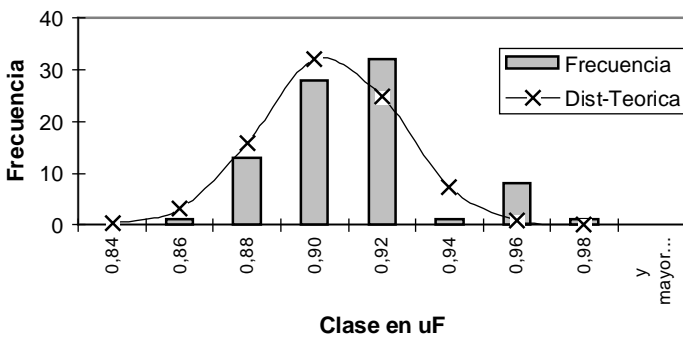
Tabla 12) Mediciones en 906Hz con el arreglo mostrado en figura 3

Condición	Cantidad de nodos de igual d	Valor medido kΩ	Error	ϵ_r	Teórico kΩ	Desviación respecto al teórico
Z - ecuación 17	-	2,10	±0,01	0,4%		-
Z - Medido	-	2,09	±0,04	2,0%		0,19%
d=1 (side)	4	1,10	±0,02	2,0%	1,05	5,04%
d=1,41 (diagonal)	4	1,44	±0,03	2,0%	1,33	7,93%
d=2 (Double side)	4	1,67	±0,03	2,0%	1,52	10,04%
d=2,24 (Knight's move)	8	1,81	±0,04	2,0%	1,62	11,73%
Argumento de Z	-	-47,4	±0,6	1,3%	-47,0	0,90%

Tabla 13) Mediciones en 1201Hz con el arreglo mostrado en figura 3

Condición	Cantidad de nodos de igual d	Valor medido kΩ	Error	ϵ_r	Teórico kΩ	Desviación respecto al teórico
Z - ecuación 17	-	1,74	$\pm 0,01$	0,1%	-	-
Z - Medido	-	1,75	$\pm 0,05$	3,0%	-	1,91%
d=1 (side)	4	0,93	$\pm 0,03$	3,0%	0,88	5,61%
d=1,41 (diagonal)	4	1,21	$\pm 0,04$	3,0%	1,12	8,04%
d=2 (Double side)	4	1,42	$\pm 0,04$	3,0%	1,27	11,87%
d=2,24 (Knight's move)	8	1,54	$\pm 0,05$	3,0%	1,36	13,66%
Argumento de Z	-	-44,0	$\pm 0,9$	2,1%	-42,8	2,73%

Tabla 14) Mediciones de R_1 , R_2 , R_3 y C para el armado de la red de impedancia. El valor promedio es el utilizado en tabla 2 y utilizado en trazado teórico figura 11. Los componentes R_3 y C mostraron mayor dispersión en la medición individual y se gráfica el histograma

<p>R_1, la mayor cantidad de muestras de igual valor estan en el promedio</p> <table border="1"> <tr><td>Máximo</td><td>21,90</td></tr> <tr><td>Mínimo</td><td>21,70</td></tr> <tr><td>Promedio R_1 (kΩ)</td><td>21,80</td></tr> <tr><td>DesvEstandar</td><td>0,03</td></tr> <tr><td colspan="2">Histograma de R_1</td></tr> <tr><td>Clase</td><td>Frecuencia</td></tr> <tr><td>21,60</td><td>0</td></tr> <tr><td>21,70</td><td>3</td></tr> <tr><td>21,80</td><td>78</td></tr> <tr><td>21,90</td><td>3</td></tr> <tr><td>22,00</td><td>0</td></tr> <tr><td>y mayor...</td><td>0</td></tr> </table>	Máximo	21,90	Mínimo	21,70	Promedio R_1 (kΩ)	21,80	DesvEstandar	0,03	Histograma de R_1		Clase	Frecuencia	21,60	0	21,70	3	21,80	78	21,90	3	22,00	0	y mayor...	0	<p>Histograma de R_3</p>  <table border="1"> <tr><td>Máximo</td><td>12,01</td></tr> <tr><td>Mínimo</td><td>11,91</td></tr> <tr><td>Promedio de R_3 (kΩ)</td><td>11,96</td></tr> <tr><td>DesvEstandar</td><td>0,02</td></tr> </table>	Máximo	12,01	Mínimo	11,91	Promedio de R_3 (kΩ)	11,96	DesvEstandar	0,02
Máximo	21,90																																
Mínimo	21,70																																
Promedio R_1 (kΩ)	21,80																																
DesvEstandar	0,03																																
Histograma de R_1																																	
Clase	Frecuencia																																
21,60	0																																
21,70	3																																
21,80	78																																
21,90	3																																
22,00	0																																
y mayor...	0																																
Máximo	12,01																																
Mínimo	11,91																																
Promedio de R_3 (kΩ)	11,96																																
DesvEstandar	0,02																																
<p>R_2, menos 2 mediciones el resto de valores iguales estan en promedio.</p> <table border="1"> <tr><td>Máximo</td><td>1,18</td></tr> <tr><td>Mínimo</td><td>1,16</td></tr> <tr><td>Promedio R_2 (kΩ)</td><td>1,17</td></tr> <tr><td>DesvEstandar</td><td>0,002</td></tr> <tr><td colspan="2">Histograma de R_2</td></tr> <tr><td>Clase</td><td>Frecuencia</td></tr> <tr><td>1,15</td><td>0</td></tr> <tr><td>1,16</td><td>1</td></tr> <tr><td>1,17</td><td>82</td></tr> <tr><td>1,18</td><td>1</td></tr> <tr><td>1,19</td><td>0</td></tr> <tr><td>y mayor...</td><td>0</td></tr> </table>	Máximo	1,18	Mínimo	1,16	Promedio R_2 (kΩ)	1,17	DesvEstandar	0,002	Histograma de R_2		Clase	Frecuencia	1,15	0	1,16	1	1,17	82	1,18	1	1,19	0	y mayor...	0	<p>Histograma de C</p>  <table border="1"> <tr><td>Máximo</td><td>0,98</td></tr> <tr><td>Mínimo</td><td>0,86</td></tr> <tr><td>Promedio C (μF)</td><td>0,90</td></tr> <tr><td>DesvEstandar</td><td>0,02</td></tr> </table>	Máximo	0,98	Mínimo	0,86	Promedio C (μF)	0,90	DesvEstandar	0,02
Máximo	1,18																																
Mínimo	1,16																																
Promedio R_2 (kΩ)	1,17																																
DesvEstandar	0,002																																
Histograma de R_2																																	
Clase	Frecuencia																																
1,15	0																																
1,16	1																																
1,17	82																																
1,18	1																																
1,19	0																																
y mayor...	0																																
Máximo	0,98																																
Mínimo	0,86																																
Promedio C (μF)	0,90																																
DesvEstandar	0,02																																