# " Todo lo que sube baja..." (... y todo lo que se carga se descarga!)


**María Paula Coluccio y Patricia Picardo**

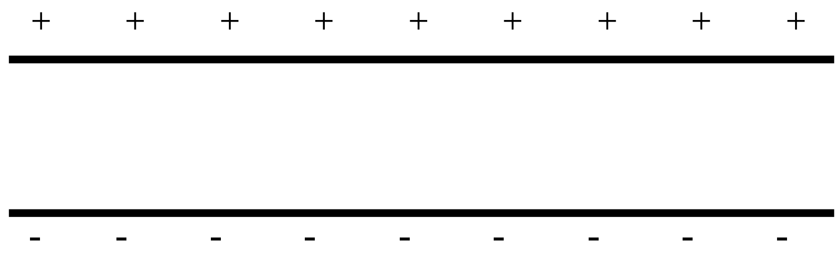
**Laboratorio I de Física**
**para Biólogos y Geólogos**
**Depto. de Física, FCEyN, UBA**
**1999**


## Resumen


En el presente trabajo se estudió el tiempo característico de un capacitor, proponiendo un modelo exponencial teórico contra el cual se han contrastado los datos experimentales obtenidos. Se trabajó con un circuito RC con corriente continua, y los voltajes estudiados se midieron por medio del programa de computación MPLI.


## Introducción

Un capacitor consta generalmente de dos conductores (placas metálicas) paralelas y separadas por una pequeña distancia en comparación a su ancho. Si se conecta cada una de las placas momentáneamente a las bornes de una fuente de energía eléctrica, en una de las placas aparecerá una carga positiva (+q) y en la otra una carga negativa (-q). Las cargas de cada una de las placas atraerán a las cargas de la otra placa y se distribuirán uniformemente en las superficies internas de las placas, generándose así un campo eléctrico entre ellas. Como la distancia entre los conductores es pequeña el campo eléctrico entre ellas será uniforme, lo cual significa que las líneas de fuerza serán paralelas y estarán igualmente espaciadas. Las líneas de campo en las orillas de las placas presentan una curvatura, (de acuerdo a lo establecido por las leyes del electromagnetismo) que siempre puede despreciarse si la distancia entre las placas es lo suficientemente pequeña.



**Capacitor de placas paralelas**

Cada una de las placas tendrá potenciales de carga diferentes, por lo tanto el capacitor quedará caracterizado por la diferencia de potencial de sus placas (V). La diferencia de potencial V es el trabajo por unidad de carga que se necesita para llevar una pequeña carga desde una placa hasta la otra. De acuerdo a su definición, V es proporcional a la carga. En particular la diferencia de potencial entre los dos conductores de un capacitor es proporcional a las cargas Q que tienen, donde Q es la carga total de cada placa. Se propone entonces:

$$Q = C * V$$

donde la constante de proporcionalidad **C** recibe el nombre de **capacitancia** y se mide en coulombs/volt . Esta unidad recibe el nombre de faradio (F). La capacitancia de un capacitor depende de las formas y las posiciones relativas de los conductores, y además del medio en el cual se encuentren inmersos los mismos.

Puede considerarse que en un capacitor hay energía eléctrica almacenada en el campo eléctrico generado entre sus placas. Como los capacitores pueden concentrar campos eléctricos intensos en pequeños volúmenes, pueden servir como dispositivos útiles para el almacenamiento de energía.

Las placas del condensador cuando se conectan a una fuente de energía eléctrica comienzan a cargarse con cargas iguales y opuestas , hasta que la diferencia de potencial entre las placas alcanza la diferencia de tensión de la fuente. Este proceso se conoce como **carga del condensador.** Si una vez terminado este proceso se retira la fuente y se cierra un circuito conectando con un cable conductor ambos extremos del capacitor cargado, se da inicio al proceso de descarga. Las cargas acumuladas en el capacitor se redistribuirán por el cable generándose una corriente eléctrica que disminuirá con el tiempo hasta llegar a un equilibrio.

Si construimos un circuito del tipo RC, es decir, con una resistencia y un capacitor conectados en serie, podremos estudiar los procesos de carga y descarga analizando cómo se comporta la diferencia de potencial en función del tiempo en cada uno de los procesos en forma experimental. Además podemos averiguar si el modelo teórico propuesto a continuación es capaz de describir los resultados experimentales obtenidos.

En el proceso de carga la diferencia de potencial (V) del circuito es constante, y resulta igual a la diferencia de tensión de la fuente de energía eléctrica. Esta puede expresarse en todo momento como la suma de las diferencias de potenciales del capacitor ($V_C$) y de la resistencia ($V_R$):

$$V = V_C + V_R$$

Teniendo en cuenta la relación antes expresada entre $V_R$ y la carga y además la relación establecida por la ley de Ohm entre la intensidad de la corriente ( I = dq/dt ) y la diferencia de potencial del conductor, podemos reescribir la ecuación anterior, obteniendo la siguiente ecuación diferencial:

$$V = \frac{Q}{C} + \frac{dq}{dt} * R$$

La función q(t) que satisface la ecuación diferencial anterior es la siguiente:

$$q(t) = V * C\,(1 - e^{-t/RC})$$

Ahora, conociendo la función que establece la dependencia entre la carga y el tiempo podemos expresar las diferencias de potencial para la resistencia y el capacitor como funciones del tiempo, resultando:

$V_C\,(t)= V * ( 1 - e^{-t/RC})$ $\qquad$ $V_R\,(t) = V - V_C = V_0 * e^{-t/RC}$

La cantidad RC o $\tau$ debe tener unidades de tiempo porque el exponente debe ser adimensional. Esta cantidad recibe el nombre de **constante de tiempo capacitiva** del circuito o **tiempo característico del capacitor**., y es el tiempo para el cual $V_C$ es proporcional a 1/e. De acuerdo con este modelo en el proceso de carga $V_C$ crece en forma exponencial con el transcurso del tiempo, estando este crecimiento limitado por la asíntota V. Por el contrario, $V_R$ describe un comportamiento exponencial decreciente, tendiendo a cero para tiempos muy grandes.

En el proceso de descarga no hay una fuente de energía, entonces:

$0 = V_C + V_R$

$0 = \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} * R$ de acuerdo con lo explicado anteriormente.

La función q(t) que satisface la ecuación diferencial para este proceso es:

$$q(t) = q * e^{-t/RC}$$

El comportamiento de las diferencias de cada uno de los potenciales en función del tiempo ahora resultan:

$V_C\,(t) = V_0 * e^{-t/RC}$ $\qquad$ $V_R\,(t) = -V_0 * e^{-t/RC}$

Para el proceso de descarga $V_C$ decrece exponencialmente con el tiempo. Ambas funciones tienen una asíntota en V = 0 para tiempos muy grandes, (es decir, cuando t tiende a infinito).

## Método experimental

Para llevar a cabo la experiencia construimos un circuito RC, utilizando una fuente de corriente continua, cables, una resistencia de magnitud conocida y un capacitor del tipo electrolítico, que tiene marcada la polaridad. La resistencia y el capacitor se conectan en serie. En la construcción del circuito utilizamos también bornelas para asegurarnos que las piezas quedaran bien conectadas.

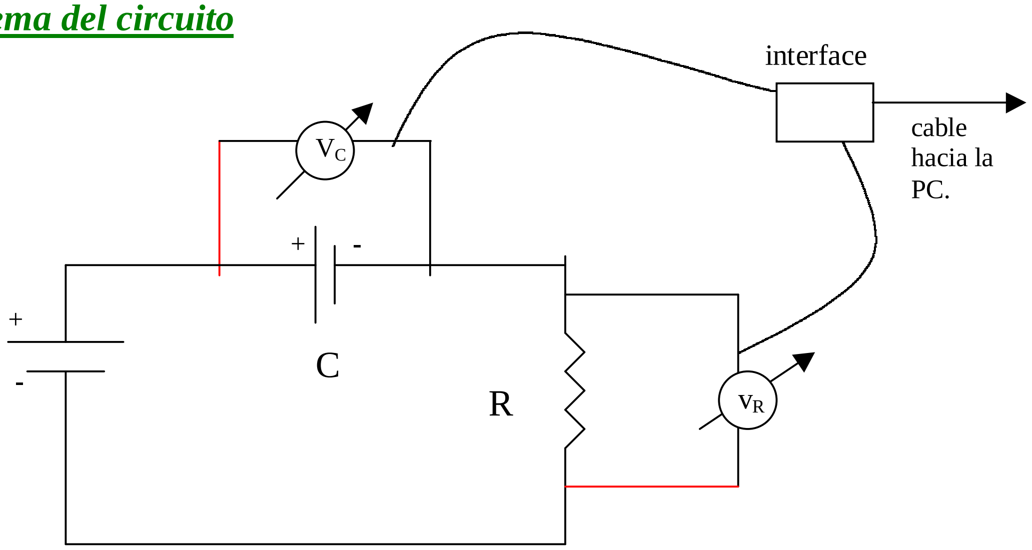
Para medir diferencias de potencial $V_R$ y $V_C$ utilizamos un multímetro digital en paralelo a la resistencia y el capacitor respectivamente.

En la construcción del circuito debemos tener especial cuidado de colocar el capacitor electrolítico con la polaridad en el sentido correcto para no quemarlo.

Tanto para el proceso de carga como para el de descarga para analizar cómo varían las diferencias de tensión $V_R$ y $V_C$ en función del tiempo utilizamos un sensor de tensión que trabaja bajo el comando del programa de computación MPLI. Este programa nos permite contar con muchas mediciones por unidad de tiempo, tanto de $V_R$ como de $V_C$. Además el programa nos permite hacer una representación gráfica de las diferencias de potencial en función del tiempo. A partir de la observación de las curvas obtenidas gráficamente, realizamos las transformaciones necesarias de los datos para tratar de conocer el valor del tiempo característico del capacitor (RC). Cuyo valor es característico del circuito RC con el que trabajamos y debe ser el mismo tanto para el proceso de la carga como para el de la descarga. Los valores para los RC hallados gráficamente serán contrastados con el valor de RC calculado a partir de los valores de la capacitancia y de la resistencia medidos con el tester.

Además estudiaremos si realmente las curvas $V_R$ (t) y $V_C$ (t) corresponden a la representación gráfica de las funciones exponenciales que propone el modelo teórico planteado. Para comprobarlo nos valemos de dos recursos matemáticos aplicables a las funciones exponenciales. Al aplicar ln (logaritmo natural) a una función exponencial su gráfico es el de una recta. La función exponencial es la única que resulta directamente proporcional a su derivada.

## ***Esquema del circuito***




## Resultados y discusión

Trabajamos con una fuente de tensión continua de 5 volts.
El valor de la resistencia medido con el multímetro es:

$$R = (64700 \pm 2100)\ \Omega$$

El valor de la capacitancia medido con el multímetro es:

$$C = 238 * 10^{-5}\ F$$

A partir de estos datos el tiempo característico del capacitor resulta:

$$\tau_1 = RC = (15,4 \pm 0,5)\ s$$

La Figura 1 nos muestra como se comportan las diferencias de potencial del capacitor y la resistencia en función del tiempo para el proceso de carga. El capacitor se carga al principio en forma rápida, pero luego se atenúa el crecimiento de $V_C$, teniendo una asíntota en V. El capacitor tiene un tope de carga, y este tope está dado por la tensión de la fuente de continua (V).

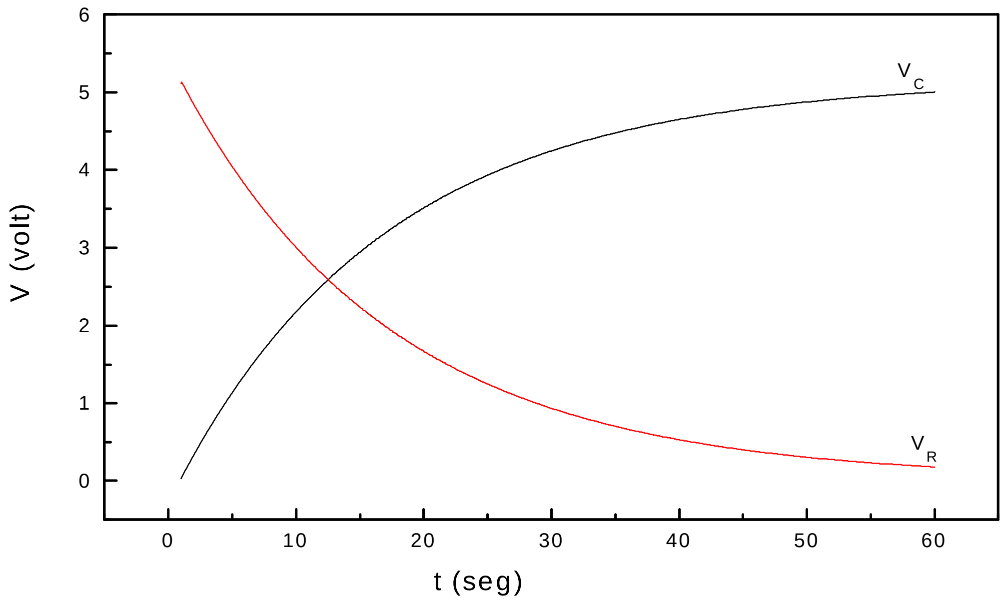



Figura 1: Volataje en función del tiempo, en el proceso de carga del capacitor. Nótese que las curvas son simétricas. $V_C$ corresponde a la diferencia de potencial del capacitor, y $V_R$ a la de la resistencia.

En la resistencia el flujo de la corriente es importante al principio, pero a medida que en el capacitor se van acumulando más cargas esta corriente disminuye, teniendo $V_R$ una asíntota en cero para el tiempo en el cual el capacitor logró acumular el total de carga, es decir cuando $V_C$ tiende a V.

De acuerdo al modelo teórico la representación gráfica de $V_R(t)$ corresponde a la de la expresión:

$$V_R(t) = V * e^{-t/RC}$$

Si a esta ecuación exponencial le aplicamos logaritmo natural (ln), su representación gráfica se transforma en la de una recta tal como puede observarse en la Figura 2.

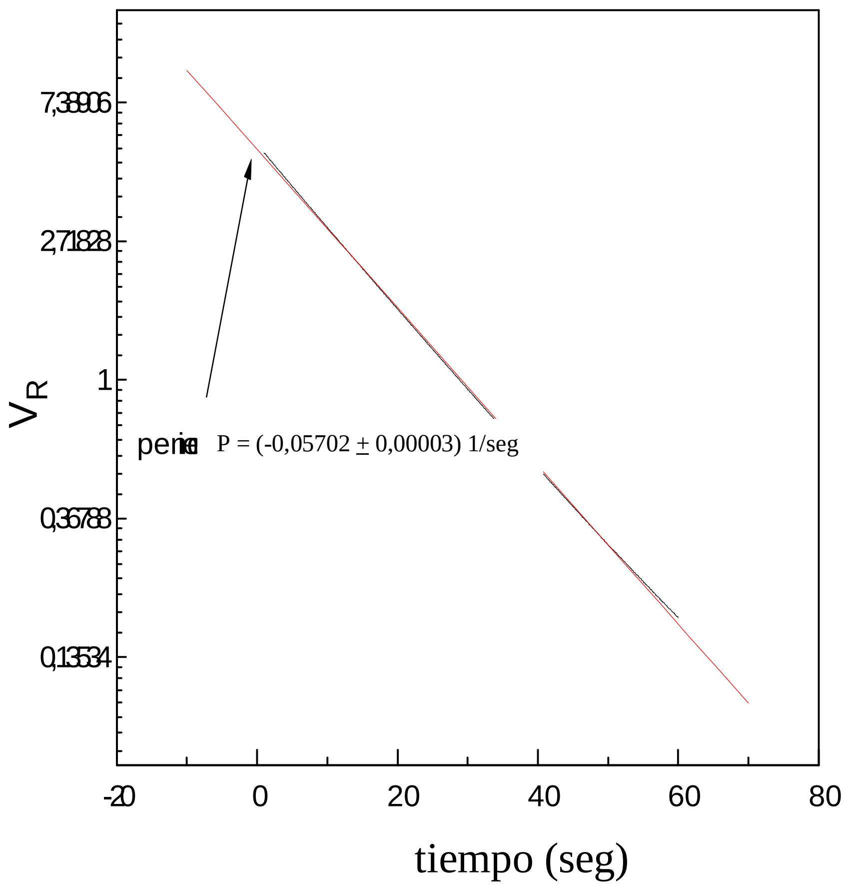



Figura 2: Diferencia de potencial de la resistencia en función del tiempo (durante el proceso de carga del capacitor). Nótese la escala logarítmica (ln) utilizada en el eje y. La recta en rojo corresponde a la regresión lineal de la línea en negro (datos experimentales), y el valor de su pendiente es -1/RC. A partir de este valor calculamos el $\tau$ del capacitor.

Por tratarse de datos experimentales es necesario realizar un ajuste. La ecuación de la recta resulta entonces:

$$\ln V_R = \ln V - t/RC$$

donde la pendiente ( -1/RC) es:

$$(-0{,}05702 \pm 3 * 10^{-5})\ s^{-1}$$

y la ordenada al origen es:

$$(1{,}661 \pm 0{,}01)$$

Del valor de la pendiente podemos obtener el tiempo característico del capacitor:

$$\tau_2 = (17{,}538 \pm 0{,}009)\ s$$

Al aplicar logaritmo natural a los datos experimentales de $V_R$ (t) transformamos su representación gráfica en lineal, con lo cual podemos afirmar que se trata de una función exponencial como la propuesta por el modelo. Se obtienen iguales resultados al aplicar el otro recurso matemático, como puede apreciarse en la Figura 3. La derivada de $V_R$ con respecto al tiempo es directamente proporcional a $V_R$, y la constante de proporcionalidad es igual a $-1/RC$ .

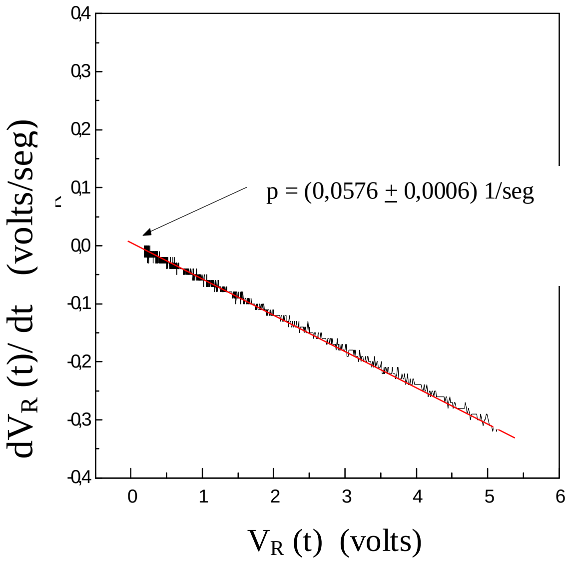



Figura3: Derivada de $V_R$ en función de $V_R$. La pendiente de la recta de regresión (línea roja) es igual a $-1/RC$. Se puede apreciar en este gráfico que la pendiente tiene un error más grande que en el caso anterior y que por lo tanto el intervalo de confianza contempla el valor obtenido para la pendiente de la Figura 2.

No tiene sentido aplicar las transformaciones anteriores sobre la curva de $V_C$(t), ya que no nos permite bajar el exponente al aplicar el logaritmo. Pero al saber cómo es el comportamiento de $V_R$, y cómo este voltaje se relaciona con $V_C$, salvamos el inconveniente de no poder aplicar ninguna transformación matemática.

$$V_R \propto dV_C/dt$$

$$\int V_R\, dt \propto V_C \propto -e^{-t/RC}$$

En la Figura 4 se puede observar cómo varían $V_C$ y $V_R$ en función del tiempo para el proceso de la descarga. La suma de ambos voltajes en todo tiempo es igual a cero. El capacitor al principio se descarga en forma más rápida, luego la descarga se hace más lenta hasta entregar el total de carga acumulada. La curva correspondiente a $V_R$ es simétrica (con respecto al eje del tiempo) a la curva de $V_C$. Ambos voltajes se estabilizan en cero con el transcurso del tiempo.

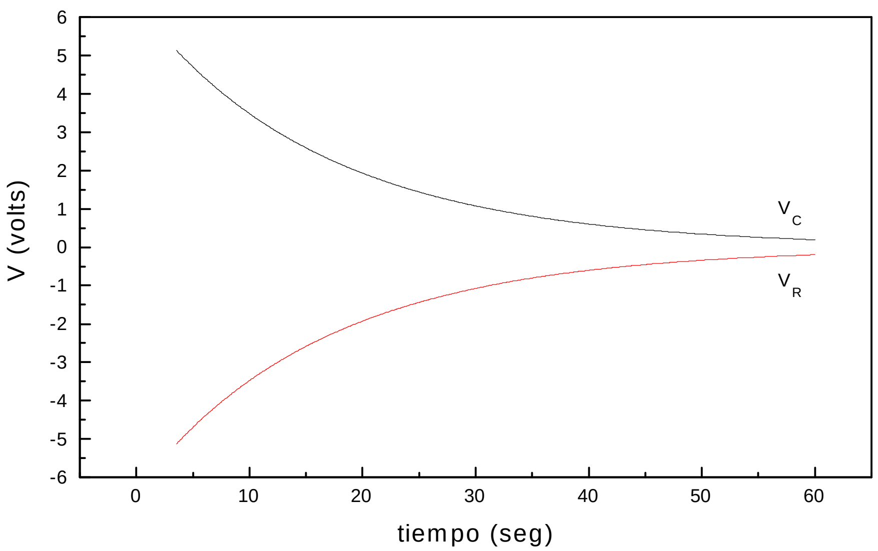



Figura 4: Voltaje en función del tiempo (para el proceso de descarga del capacitor). Nótese que ambas curvas tienden a una asíntota de valor cero y son simétricas respecto a dicho valor. La suma de ambos voltajes en todo tiempo es igual a cero.

Según lo establecido por el modelo teórico propuesto para el circuito, la ecuación que describe la curva de $V_C$ es la siguiente:

$$V_C(t) = V * e^{-t/RC}$$

a la cual se le puede aplicar la misma transformación para el proceso de carga.

La Figura 5 muestra cómo al aplicar el logaritmo natural a la representación de $V_C$ (t) se obtiene una recta, cuya pendiente resulta:

$$\text{Pendiente} = -1/RC = (-0{,}05786 \pm 0{,}00002)\ s^{-1}$$

La constante de tiempo capacitiva del circuito a partir de este gráfico resulta:

$$\tau_3 = (17{,}283 \pm 0{,}006)\ s$$

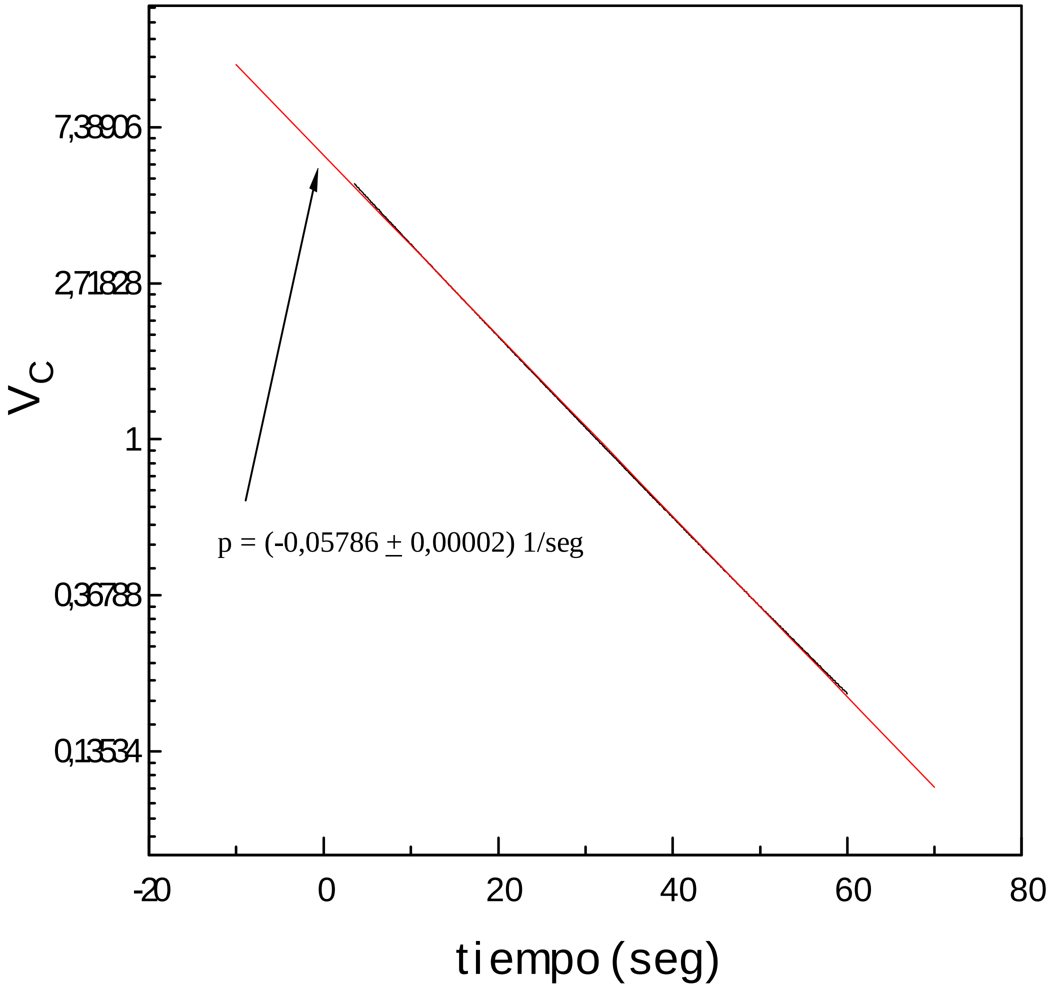



**Figura 5:** Voltaje del capacitor en función del tiempo. Nótese la escala logarítmica (ln) utilizada en el eje y. La recta en rojo corresponde a la recta que mejor ajusta a los datos experimentales (línea negra). La pendiente de esta recta es –1/RC, y a partir de este valor podemos hallar el valor de $\tau$.

Nuevamente la curva es la representación de la función exponencial y no, por ejemplo, la representación de una hipérbola, ya que si bien el gráfico podría corresponder a cualquiera de estas dos funciones, al aplicar ln sobre una función hiperbólica no obtendríamos la representación de una recta.

La **Figura 6** nos es útil para confirmar que el decrecimiento de $V_C$ en función del tiempo es del tipo exponencial, porque como ya sabemos, la función exponencial es la única que resulta directamente proporcional a su derivada.

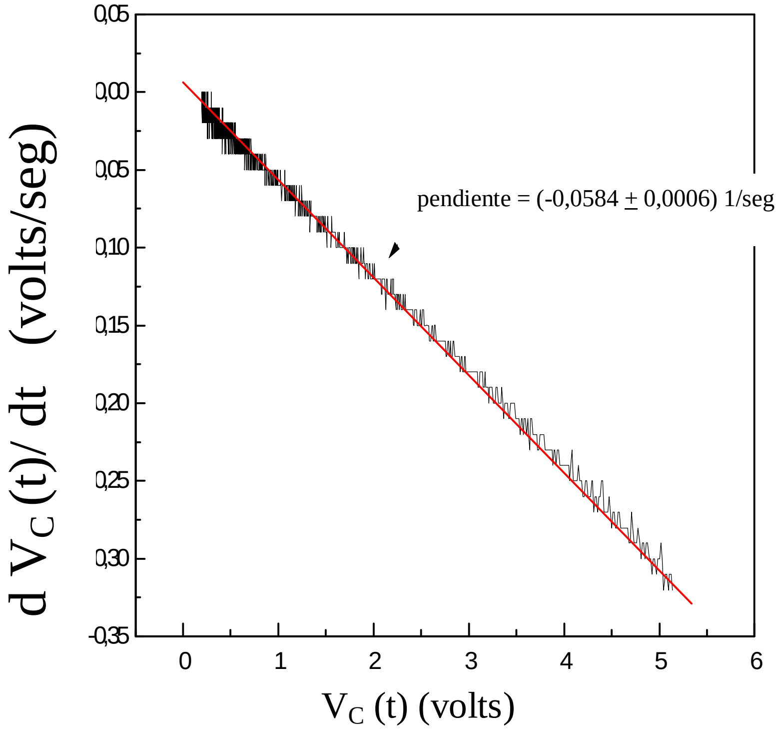



Figura 6: Derivada de $V_C$ en función de $V_C$. La pendiente de la recta de regresión (línea roja) es igual a -1/RC. Se puede apreciar en este gráfico que la pendiente tiene un error más grande que en el caso anterior y que por lo tanto el intervalo de confianza contempla el valor obtenido para la pendiente de la Figura 5.

## Conclusiones

Por diferentes vías hemos tratado de llegar al valor del tiempo característico del capacitor ($\tau$), y en todos los casos obtuvimos resultados similares. Es decir, no hay diferencias significativas entre los tres valores de $\tau$ a los que arribamos, si bien las mayores diferencias se encuentran entre el valor de $\tau_1$ con respecto a los de $\tau_2$ y $\tau_3$.

Para hallar el valor de $\tau_1$ se utiliza el valor de la capacitancia medida con el tester y éste tiene una mayor imprecisión asociada debida al aparato.

El modelo teórico que propusimos para describir la variación de la tensión en función del tiempo es coherente con los resultados experimentales obtenidos. El modelo teórico que propone un crecimiento exponencial para $V_C$ y un decrecimiento exponencial de $V_R$ para el proceso de carga es capaz de describir lo que ocurre al realizar la experiencia de medir $V_C$ y $V_R$ en un circuito RC a diferentes tiempos.

## Apéndice: cálculo de errores

$\tau = R * C$

$\Delta\tau = [( d\tau/dR \; * \; \Delta R)^2 + (d\tau/dC \; * \; \Delta C)^2]^{1/2}$

*Nota:* se toma $\Delta C$ del téster = 0

$\tau$ = 1/pendiente

$\Delta\tau = \left| d\tau/d\,\text{pend} \; * \Delta\text{pend} \right|$

## Bibliografía consultada

* *Física, Parte 2*, David Halliday, Robert Resnick, Compañía Editorial Continental S.A., México, primera edición en español de la tercera edición en inglés: enero 1980.