

Física de la caída de un imán permanente por un tubo conductor y estudio experimental de los pulsos inducidos en una espira

Anna Joncquel (anna_joncquel@hotmail.com)

Física III, Universidad Nacional de San Martín, 2010 -Buenos Aires, Argentina.

Resumen

Se propone estudiar experimentalmente los pulsos inducidos por el pasaje de un imán permanente a través del eje de una espira. Analizar la caída del imán por un tubo conductor y determinar su velocidad terminal. Comparar los resultados obtenidos con los predichos por el modelo teórico y las leyes del electromagnetismo. Determinar el momento magnético del imán.

Introducción - Modelo teórico

Si se deja caer un imán permanente a través de un tubo conductor no ferromagnético, a pesar de que no exista una atracción magnética, la caída del imán se ve significativamente retardada. Esto se debe al efecto de la fuerza magnética que, originada por la interacción entre las corrientes inducidas en el tubo y el imán, frena el movimiento de este último hasta alcanzar una velocidad límite v_{∞} .

Para realizar un análisis cuantitativo del pulso inducido, se estudia primero la perturbación electromagnética producida por un imán permanente que se mueve a través de una bobina en un tubo no conductor a distintas velocidades. Todos los datos experimentales son el voltaje inducido en función del tiempo. Las curvas obtenidas permiten determinar las propiedades magnéticas del imán y verificar los modelos teóricos de la inducción electromagnética.

Debido a que el imán se mueve a lo largo del eje de la espira, el flujo magnético a través de la espira, Φ_m , varía. Este experimento demuestra el efecto de la ley de Faraday, según la cual la variación del flujo magnético produce una fuerza electromotriz (fem inducida) en la espira, $\mathcal{E} = -d\Phi_m/dt$, que se opone al efecto que la produce.

Por otra parte, se considera al imán como compuesto por dos cargas magnéticas ficticias de magnitud q_m y de signos opuestos, separadas por una distancia L igual a la longitud del imán. Si m_B es el momento magnético del imán, estas cargas pueden escribirse como $q_m^{\pm} = \pm m_B/L$. El campo magnético creado por el polo positivo q_m^+ a una distancia r es $B^+(r) = \mu_0 \cdot q_m^+ / 4\pi r^2$.

La fuerza electromotriz en las espiras, inducida por el polo positivo del imán que se mueve por el eje z de las espiras, se obtiene según la ley de Faraday como la derivada temporal del flujo magnético Φ_m que las atraviesa. Debido a que no existen polos magnéticos separados, podemos escribir el flujo magnético producido por el imán como^[2]:

$$\Phi_m(z) = \Phi_m^+(z + L/2) + \Phi_m^-(z - L/2)$$

La fem inducida por el imán en la bobina puede entonces escribirse:

donde v es la velocidad del imán al atravesar

$$\mathcal{E}(z) = v \cdot N \cdot m_B \cdot \frac{R^2}{2 \cdot L} \cdot \mu_0 \cdot \left\{ \frac{1}{((z + L/2)^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{((z - L/2)^2 + R^2)^{3/2}} \right\} \quad (1)$$

la bobina de radio R y N espiras. La velocidad v puede calcularse al considerar el movimiento del imán como una caída libre. Se obtiene así

que $v = \sqrt{2g \cdot y}$, con $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ la aceleración de la gravedad e y la distancia recorrida por el imán hasta alcanzar el centro de la bobina.

Para obtener ε como función del tiempo, se usa $z = v(t - t_0)$, donde t_0 es el tiempo en el cual el centro del imán y el centro de la bobina coinciden. Reescribiendo la ecuación (1) se encuentra que

$$\varepsilon(t) = \frac{v N \mu_0 m R^2}{2L} \left\{ \frac{1}{[(v(t-t_0) + L/2)^2 + R^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(v(t-t_0) - L/2)^2 + R^2]^{3/2}} \right\} \quad (2)$$

Además, utilizando estas últimas expresiones se puede obtener el valor de la integral de $\varepsilon(t)$, I_ε , entre t_0 e infinito. El resultado es^[2]

$$I_\varepsilon = \int_{t=t_0}^{\infty} \varepsilon(t) \cdot dt = N \cdot m_B \cdot \mu_0 \cdot \left\{ \frac{1}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}} \right\} \quad (3)$$

Para determinar la velocidad límite v_∞ que adquiere el imán al caer por un tubo conductor no ferromagnético, se debe desarrollar un modelo teórico que explique y conecte la información experimental obtenida a partir de los pulsos de tensión inducidos en las bobinas cuando el imán pasa a través de las mismas. En este caso, se utiliza un tubo conductor con varias espiras fijas equiespaciadas a lo largo del mismo.

Dado que la fuerza que frena al imán es proporcional a la velocidad v del imán, es decir $F_M = Kv$, según la segunda Ley de Newton y siendo m la masa del imán, se obtiene que

$$m \alpha = m g - Kv \quad (4)$$

Sabiendo que la aceleración es la derivada temporal de la velocidad, se tiene que

$$dv/dt = g - bv \quad (5)$$

con $b = K/m$. Al resolver esta ecuación diferencial, se obtiene una solución de la forma:

$$v(t) = v_\infty (1 - e^{-bt}) \quad (6)$$

con $v_\infty = g/b$. El imán caerá finalmente con una velocidad constante, dada por $v_\infty = mg/K$, que es fácilmente medible a partir de los intervalos de tiempo que separan los distintos pulsos inducidos y la distancia entre las espiras.

Por conservación de la energía, cuando el imán alcanza su velocidad límite, la variación de la energía gravitatoria se usa en el calentamiento del tubo (potencia Joule), es decir^[1]:

$$P = v_\infty \cdot m \cdot g = v \cdot \frac{\sigma \cdot \delta}{2\pi \cdot a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t) \cdot dt \quad (7)$$

De esta ecuación y sabiendo que $V(t) = N \cdot \varepsilon(t)$, se puede obtener una expresión que relaciona la fuerza magnética con la tensión inducida en las espiras^[1]:

$$F_M = m \cdot g = \frac{\sigma \cdot \delta}{2\pi \cdot a \cdot N^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V^2(t) \cdot dt \quad (8)$$

con σ la conductividad del material del tubo y δ el espesor de su pared. La bobina que mide la tensión del pulso $V(t)$ tiene N espiras y su radio es a .

La primera parte de este experimento se dedica a estudiar la forma de los pulsos inducidos por un imán permanente al atravesar una bobina con distintas velocidades. Por último, se propone el estudio de la caída del imán por un tubo metálico no ferromagnético.

Método experimental

Proyecto I: Estudio experimental de los pulsos inducidos por un imán al atravesar una espira

Para estudiar la forma del pulso de tensión inducida en una bobina cuando el imán la atraviesa con distintas velocidades, se dispone de un tubo no conductor de acrílico y de diámetro interno mayor que el imán, de modo de que el mismo pueda caer en su interior evitando los roces con las paredes. Como indicado en la Figura 1, se coloca una bobina de 1000 vueltas sobre el tubo que pueda deslizarse a lo largo del mismo. El tubo se posiciona verticalmente y al final del mismo se dispone de un recipiente para recibir el imán. La bobina se conecta a la entrada de un sistema de adquisición de datos por computadora que registra los pulsos generados al pasar el imán por las espiras. El imán se suelta a una distancia y del centro de la bobina y se registran los datos obtenidos como voltaje en función del tiempo. Al no disponer de un fotointerruptor que funcione como “trigger”, se calcula el tiempo de caída con las ecuaciones de movimiento para una caída libre y se determina la velocidad del imán al atravesar la bobina: $t = \sqrt{2y/g}$ y $v = \sqrt{2gy}$.

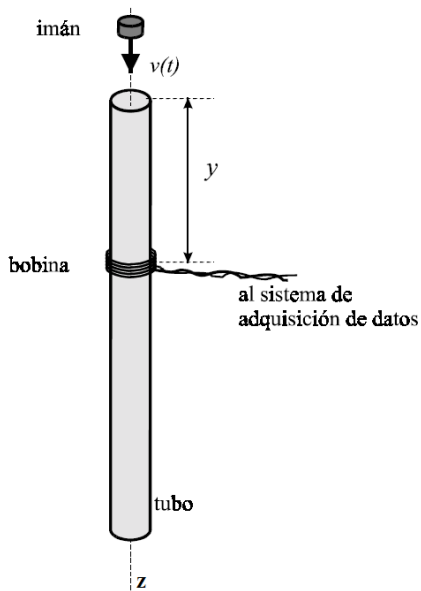


Fig.1: Diagrama del dispositivo experimental sugerido para medir el pulso inducido por el pasaje de un imán a través de una bobina.

Se realiza el experimento para distintos valores de y y se registran los pulsos de tensión inducidos en las espiras por el paso del imán. Los pulsos obtenidos con el sistema de adquisición de datos se comparan con la curva de la ec. (2), siendo $v = \sqrt{2g \cdot y}$ y t_0 el tiempo que satisface $\epsilon(t_0) = 0$. Finalmente, se calcula en cada caso el valor experimental de I_e realizando una integración numérica (método del trapecio) de los datos de tensión inducida en función del tiempo entre t_0 y el infinito (ver ecuación (3)). Se representa gráficamente I_e en función de la velocidad v y se lo compara con el valor predicho por el término de la derecha de la ecuación (3).

Proyecto II: Caída de un imán permanente por un tubo conductor

El objetivo de este proyecto es estudiar la forma de los pulsos de tensión inducidos en las espiras cuando el imán las atraviesa y medir la velocidad límite v_∞ que adquiere el imán por el tubo. Para ello, se utiliza una disposición experimental similar a la presentada en la Figura 1, excepto que el tubo es de un material conductor no ferromagnético. Además, el tubo posee dieciséis (16) bobinas de 20 espiras y radio a conectadas en serie y equiespaciadas a lo largo del tubo. El tubo tiene un radio medio a , conductividad σ y el espesor de la pared es δ . El imán utilizado tiene un momento magnético m_B , masa m y longitud L . Todos estos parámetros son conocidos o medibles.

A partir del gráfico de la tensión inducida en función del tiempo, se determina el perfil de velocidad del imán en el tubo y se determina el valor de la velocidad límite v_∞ . Al comparar este gráfico con el obtenido por la ecuación (6), se obtienen los parámetros v_∞ y b .

El experimento se realiza para tubos de distintos metales. En este caso, se utiliza primero un tubo conductor de cobre ($\rho_{Cu} = 1,72\mu\Omega.cm$) y luego uno de bronce ($\rho_{Bronce} = 13\sim 29\mu\Omega.cm$).

Resultados

Parámetros de los elementos utilizados

Largo del imán (cm)	L	2.0±0.5
Masa del imán (g)	m	9.3±0.1
Radio de la bobina <i>proyecto I</i> (cm)	R	1.4±0.5
Número de espiras de la bobina <i>proyecto I</i>	N₁	1000
Diámetro exterior del tubo conductor o diámetro de las espiras (mm)	a	19±0.5
Espesor de la pared del tubo (mm)	δ	2±0.5
Número de espiras de la bobina <i>proyecto II</i>	N₂	20

Proyecto I: Estudio experimental de los pulsos inducidos por un imán al atravesar una espira

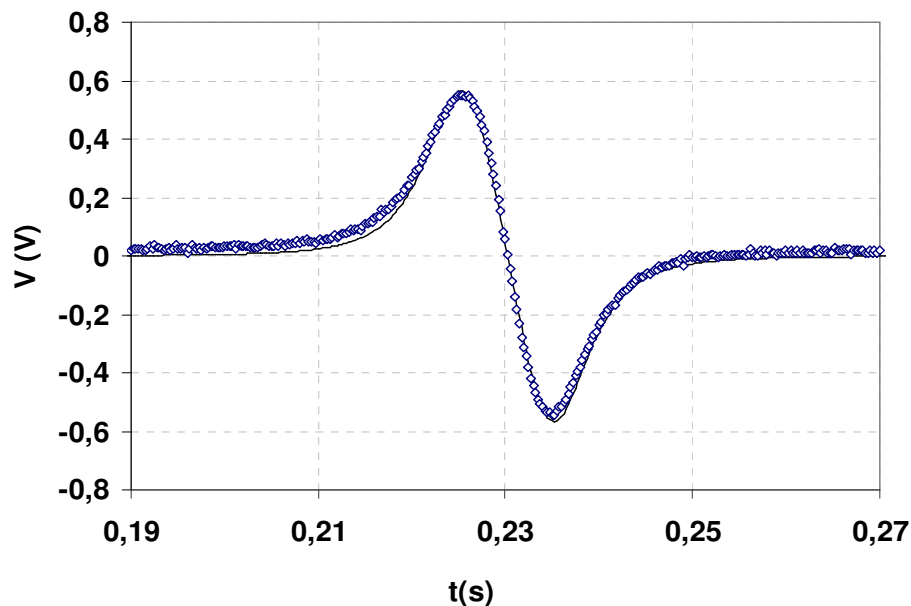


Fig.2: Forma general del pulso inducido en una espira en función del tiempo correspondiente a una velocidad determinada del imán (2.26m/s) superpuesto a la curva obtenida teóricamente por la ec. (2).

A partir de la curva teórica se obtiene el valor del momento magnético del imán.

$$m_B = 0,14 \text{ A.m}^2$$

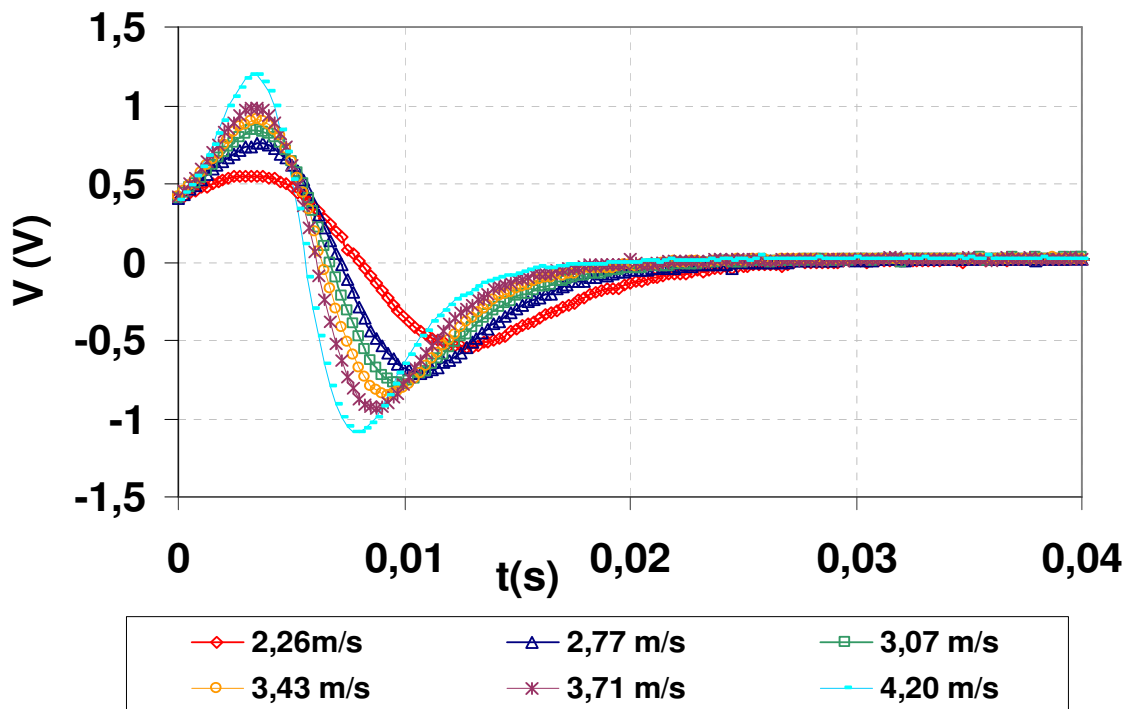


Fig.3: Pulsos inducidos en una espira para diferentes velocidades (a) $2,26 \pm 0,043 \text{ m/s}$ (b) $2,77 \pm 0,053 \text{ m/s}$ (c) $3,07 \pm 0,059 \text{ m/s}$ (d) $3,43 \pm 0,066 \text{ m/s}$ (e) $3,71 \pm 0,071 \text{ m/s}$ (f) $4,20 \pm 0,081 \text{ m/s}$.

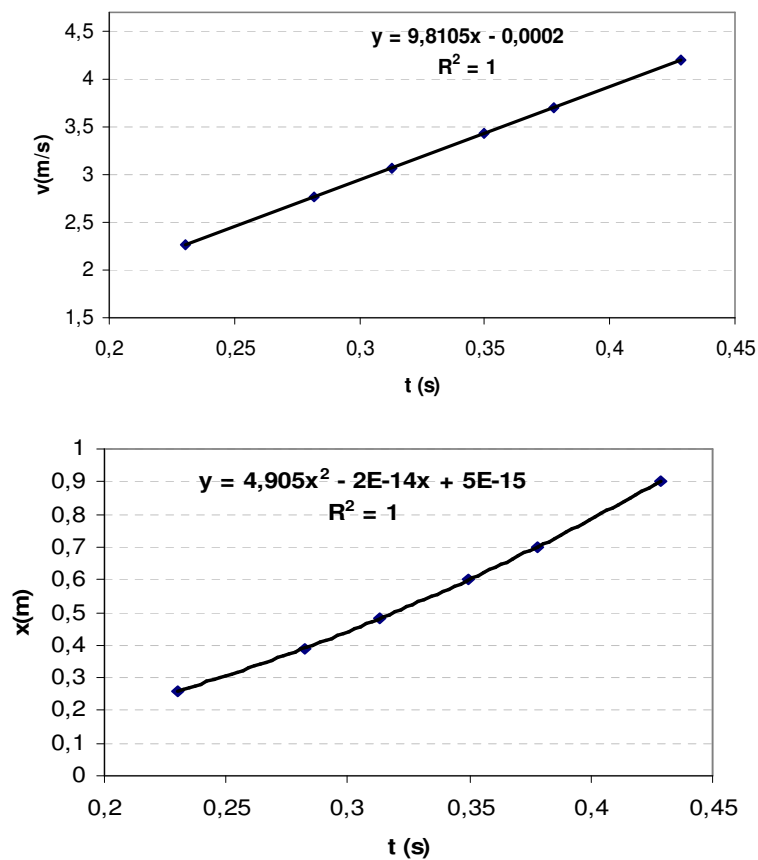


Fig. 4: Perfil de velocidad de caída del imán y de la distancia recorrida a través del tubo de acrílico en función del tiempo.

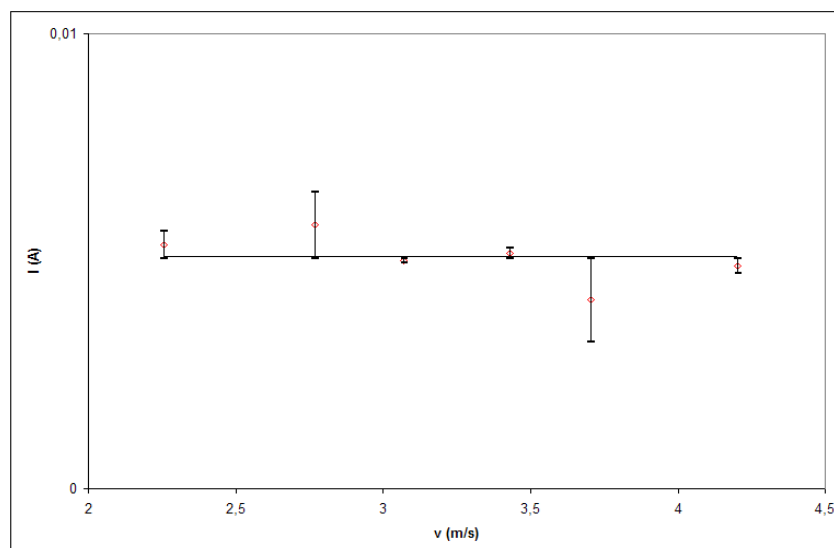


Fig. 5: Valor absoluto del área de la segunda mitad del pulso inducido correspondiente a diferentes velocidades del imán. La media de los valores es $5,07 \cdot 10^{-3} \text{ V.s}$

A partir de la ecuación (3) y conociendo el valor de los parámetros necesarios, obtenemos el valor teórico de la integral I_e independientemente de la velocidad del imán:

$$I_e = 5,00 \cdot 10^{-3} \pm 10^{-3} \text{ V.s}$$

Proyecto II: Caída de un imán permanente por un tubo conductor

Tubo conductor de cobre

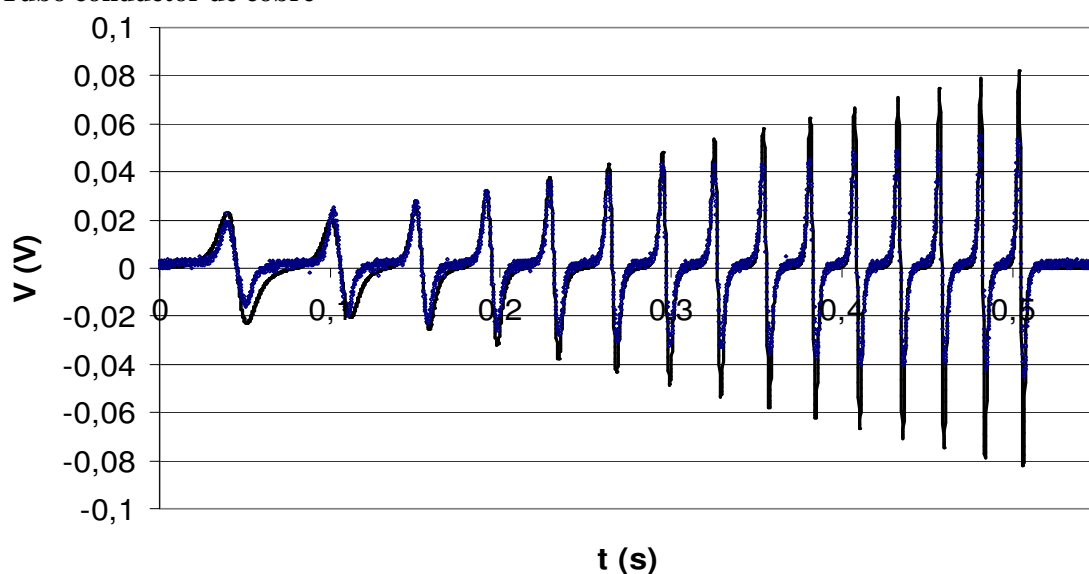


Fig. 6: Superposición de los perfiles de la tensión inducida en las bobinas del tubo conductor en función del tiempo obtenidos de forma experimental y teórica.

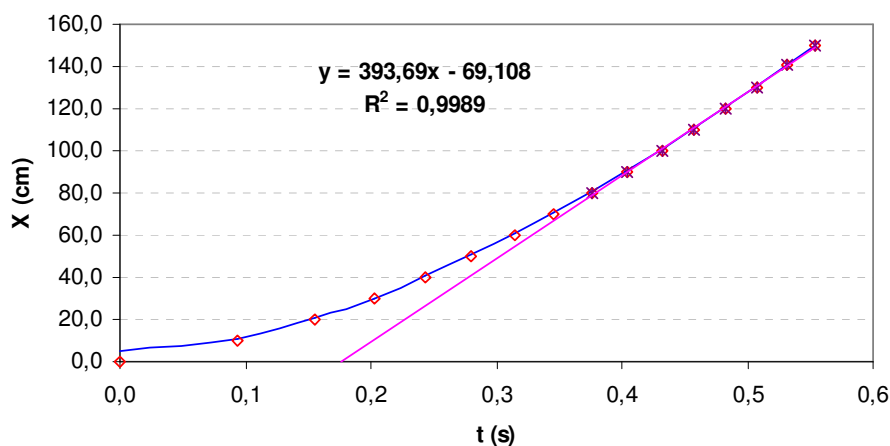


Fig. 7: Perfil de la distancia recorrida por el imán a través del tubo conductor en función del tiempo. Los puntos representan las medidas experimentales y la curva continua los valores predichos teóricamente. La línea de tendencia lineal da el valor esperado de la velocidad final alcanzada en la experiencia.

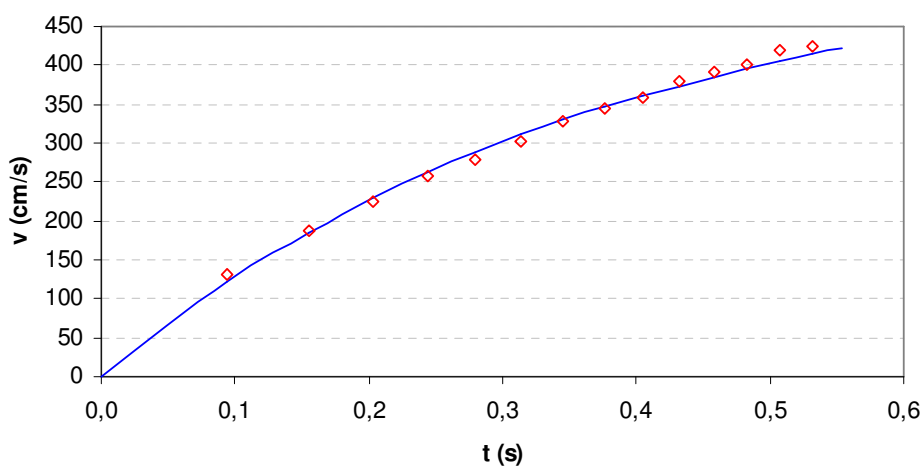


Fig. 8: Velocidad del imán dentro del tubo conductor en función del tiempo. Los puntos representan las medidas experimentales y la curva continua los valores predichos por la ecuación (6). Se observa que la curva tiende hacia un valor constante.

Parámetros obtenidos:

$$v_{\text{final}} = 5,4 \text{ m/s}$$

$$b = 2,7$$

$$x_0 = 196 \text{ cm}$$

Tubo conductor de bronce

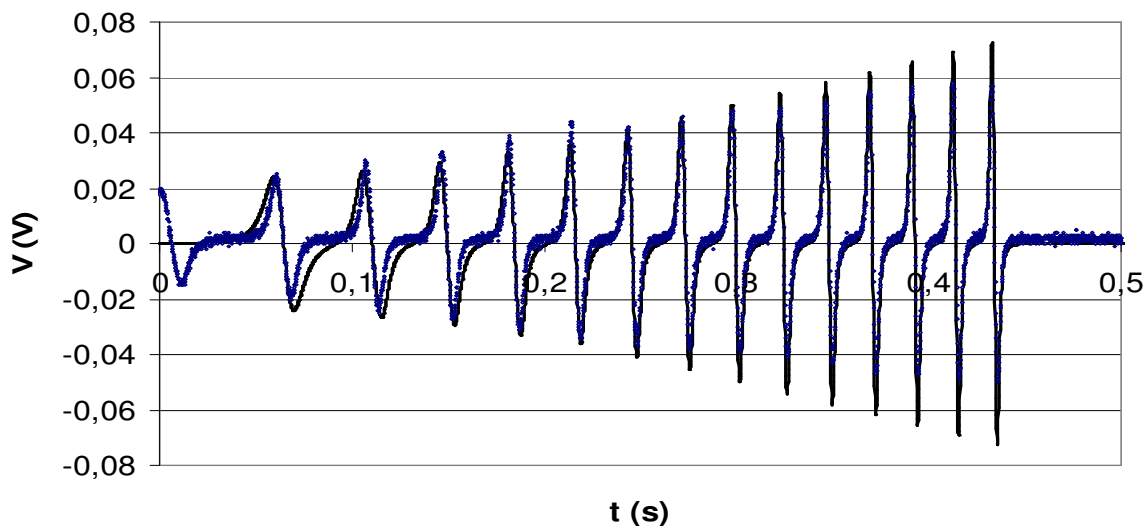


Fig. 9: Superposición de los perfiles de la tensión inducida en las bobinas del tubo conductor en función del tiempo obtenidos de forma experimental y teórica.

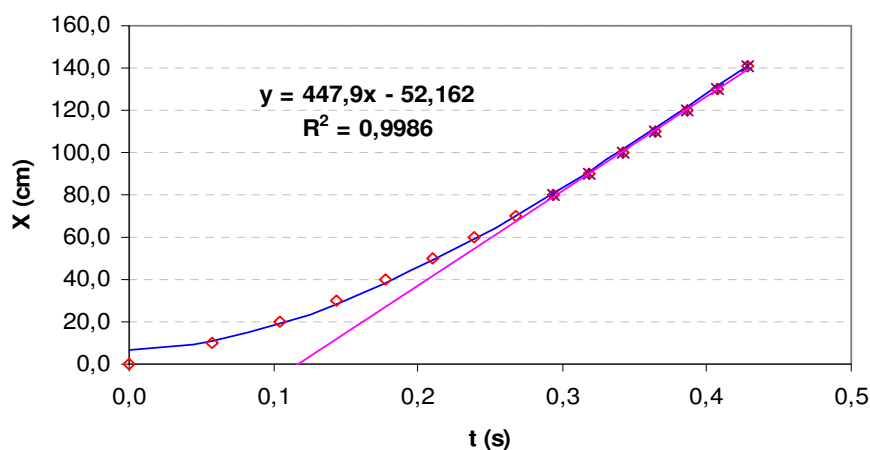


Fig. 10: Perfil de la distancia recorrida por el imán a través del tubo conductor en función del tiempo. Los puntos representan las medidas experimentales y la curva continua los valores predichos teóricamente. La línea de tendencia lineal da el valor esperado de la velocidad final alcanzada en la experiencia.

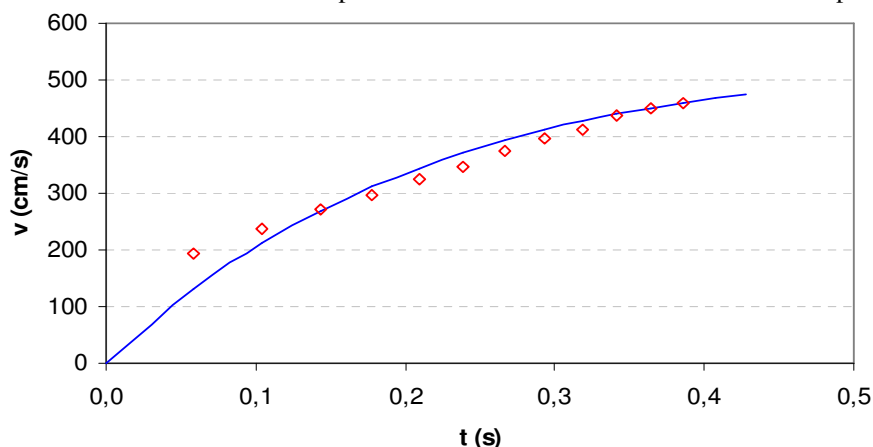


Fig. 11: Velocidad del imán dentro del tubo conductor en función del tiempo. Los puntos representan las medidas experimentales y la curva continua los valores predichos por la ecuación (6). Se observa que la curva tiende hacia un valor constante

Parámetros obtenidos:

$$v_{\text{final}} = 5,5 \text{ m/s}$$

$$b = 4,7$$

$$x_0 = 110 \text{ cm}$$

Discusión

Proyecto I

De la Fig.2, se observa una muy buena concordancia entre la curva experimental y la calculada a partir de la ec. (2). Las ecuaciones (1) y (2) muestran que la fem inducida es directamente proporcional a m_B , momento magnético del imán. De la superposición de la curva teórica en la Fig.2 se pudo obtener el valor del momento magnético del imán utilizado. Sin embargo, no se realizó un experimento adicional para medir directa o indirectamente esta magnitud.

Si se analiza la Fig.3, se puede determinar la dependencia de $\varepsilon(t)$ con la velocidad v del imán. Las ecuaciones (1) y (2) predicen que la fem inducida es proporcional a v . Esto se confirma en la Fig.3 ya que la forma del pulso inducido varía con la velocidad con la que el imán atraviesa la bobina: al aumentar la velocidad, la intensidad del pulso aumenta y su período disminuye. Además, esta figura sugiere que el área encerrada por la segunda mitad del pulso es independiente de la velocidad del imán. Esto puede comprobarse fácilmente con la ec. (3). Si se realiza la integración numérica del pulso obtenido, se obtiene que este valor es constante. Esto se muestra en la Fig.4, en la cual se graficó I_e en función de v . Se observa que en efecto el área de la segunda mitad del pulso inducido es independiente de la velocidad. Se comparó el valor de I_e obtenido mediante la integración numérica con aquel calculado a partir de los parámetros del sistema en cuestión (ver términos de la ecuación 3). Los resultados concuerdan dentro de sus márgenes de error.

Proyecto II

En la segunda parte del proyecto, se estudió la caída del imán por un tubo conductor no ferromagnético con bobinas equiespaciadas en su largo. Los resultados obtenidos para cada tubo se muestran en las Figs. 6 y 9.

Estas representan la forma de los pulsos inducidos (fem inducida en Volts) en función del tiempo. En ambas figuras se observan quince pulsos, lo que significa que la primera bobina no arrojó resultados en el sistema de adquisición de datos. Se superpusieron a las curvas de los pulsos experimentales aquellas obtenidas a partir de la ec. (2) y se observó la concordancia entre ellas. A continuación, se graficó la distancia recorrida por el imán en el tubo en función del tiempo (Figs. 7 y 10) y se superpuso la curva obtenida mediante el modelo teórico. Se tomaron los últimos puntos experimentales en los cuales la velocidad mostraba un comportamiento lineal y de la pendiente de esta recta se obtuvo el valor de la velocidad final a la que se llegó en este experimento. Las figuras 8 y 11 muestran los datos experimentales obtenidos de la velocidad del imán en función del tiempo, superpuestos a la curva obtenida mediante la ec. (6). Se observa una correcta concordancia entre ellas. De esta aproximación, se obtuvieron los parámetros de la ec. (6). En ambos casos, para el tubo de cobre y el de bronce, no se alcanzó la velocidad terminal v_∞ predicha por el modelo teórico ($v_{\text{final}} < v_\infty$). Esto puede deberse a que el largo del tubo no es suficiente para lograr que el imán alcance su velocidad terminal. Este hecho puede comprobarse con la ec.(8). En el caso del tubo de cobre, el valor de la fuerza obtenido mediante la integral del voltaje al cuadrado ($F_M = 0,060 \pm 0,017N$) es 1.5 veces inferior a aquel obtenido al igualar la fuerza magnética al peso del imán ($mg = 0,091 \pm 0,0010N$). En el caso del tubo de bronce, se obtuvieron valores de la fuerza magnética comprendidos entre $0,038 \pm 0,011N$ y $0,086 \pm 0,024N$ dependiendo de la conductividad de la aleación.

Conclusiones

El experimento realizado es una sencilla y práctica demostración de la ley de Faraday y de la ley de Lenz. La caída de un imán a través de una bobina en un tubo no conductor, la intensidad y el período de los pulsos inducidos dependen de la velocidad del imán. El área encerrada por los pulsos es independiente de la velocidad y depende del valor del momento magnético del imán utilizado. Explotando esta propiedad fue posible determinar el momento magnético del imán a partir de las leyes del electromagnetismo. Este valor puede verificarse por otros métodos de medición, aunque en este caso no lo realizamos.

El modelo teórico propuesto, Ecs. (1) y (2), fue verificado experimentalmente y se pudo describir la forma de pulsos inducidos por el imán por una función teórica obtenida mediante las ecuaciones (1) y (2).

Se verificó el modelo de la física de la caída de un imán en un tubo conductor, explicitado en las ecuaciones (5) y (6).

A partir de la aproximación con el modelo teórico, se obtuvieron los parámetros de la ec. (6) correspondientes a b y a la velocidad terminal v_{∞} que alcanza el imán.

En la experiencia, el imán no logró alcanzar la velocidad terminal; la fuerza magnética y el peso no se igualaron para lograr un movimiento no acelerado de velocidad constante.

Bibliografía

1. **Física de la caída de un imán permanente por un tubo conductor**, *Física re-Creativa* – S.Gil y E. Rodríguez – Prentice Hall – Buenos Aires 2001- www.fisicarecreativa.com
2. J. Manzanares, *et al.*, “An experiment on magnetic induction pulses”, *Am. J. Phys.* **62**,702 (1994)