

# **Fuerza de repulsión entre un imán y un disco rotante**

## ***Levitación magnetica***

*Paula Beati y Marysol Sapoznik*

*Laboratorio 3 - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires - Diciembre de 1999*

### **Resumen**

Al hacer girar un disco de material no ferroso sobre un imán se observa una fuerza de interacción con componentes en todas las direcciones (levitación, freno magnético y radial).

Estas fuerzas de interacción provienen de las corrientes parásitas inducidas en el disco. La corriente que circula por el disco se opone a la variación del campo que lo atraviesa. El disco y el imán se repelen como dos imanes con polos iguales frente a frente.

En este trabajo se estudia cualitativamente el campo magnético de las corrientes parásitas y se mide la fuerza de repulsión sobre un imán debida a ellas. Se expone brevemente un modelo teórico (Maxwell, 1872) que permite calcular el potencial y el campo magnético producido por las corrientes parásitas, así como las fuerzas de levitación, freno magnético y radial entre el imán y el disco rotante. Se comparan los resultados de dicho modelo con los obtenidos experimentalmente.

### **Introducción.**

En un conductor perfecto no hay ninguna resistencia al paso de la corriente. Si se generan corrientes en él, pueden mantenerse circulando permanentemente. En realidad una diferencia de potencial muy débil generaría una corriente arbitrariamente grande, lo cual significa que no puede haber ninguna diferencia de potencial y por lo tanto ninguna variación del flujo de campo magnético en el conductor. Cualquier intento de hacer que un flujo magnético atravesara una lámina de conductor genera corrientes que crean campos magnéticos contrarios, todos con diferencias de potencial infinitesimales, de manera que no haya flujo de campo.

Si se le acerca un imán a una lámina de conductor perfecto aparecen corrientes en la lámina, a estas corrientes se las llama corrientes parásitas.

Como las corrientes parásitas crean campos que se oponen, el conductor repele al imán. Si el conductor no es completamente perfecto habrá cierta resistencia a la circulación de las corrientes parásitas. Las corrientes tenderán a extinguirse y el imán se acercará al conductor. Las corrientes parásitas en un conductor real necesitan una diferencia de potencial que las mantenga, y para tener una diferencia de potencial el flujo del campo magnético deberá estar variando. El flujo del campo penetra gradualmente en el conductor.

En un conductor real, no solo hay fuerzas repulsivas provenientes de las corrientes parásitas, sino también fuerzas laterales. Si se mueve un imán lateralmente a lo

largo de una superficie conductora, las corrientes parásitas producen una fuerza de retardo debido a que las corrientes inducidas se oponen a la variación de la ubicación del flujo. Estas fuerzas son proporcionales a la velocidad.

La forma más general de la Ley de Lenz establece que las corrientes inducidas darán como resultado una fuerza magnética en la dirección en la que se minimice la disipación por efecto Joule.

En un disco rotante, para sacar al imán de la zona donde el flujo varía, la fuerza radial tiene dirección hacia el centro (en el centro el flujo parece no cambiar). Para un imán cerca del borde del disco la fuerza radial tiene dirección opuesta (en  $\infty$  el flujo no cambia). La fuerza de freno disminuye la velocidad, por lo tanto, disminuye las corrientes inducidas y la fuerza de levitación aleja el imán del campo magnético de las corrientes inducidas, decreciendo así la cantidad de corriente inducida.

Según el modelo teórico de Maxwell, el potencial generado por las corrientes parásitas inducidas en un conductor, cuando éste se mueve con velocidad  $v$  en el sentido de las  $x$  positivas sobre un imán ( $x=0$  es la posición del imán) tendrá la misma dependencia funcional en  $v_0$ ,  $v$  y  $r$  que

$$\Phi_i(x+vt, 0, z, t) = \frac{\mu_0 q^*}{4\pi} \frac{v}{[(|z|+h)^2 v^2 - 2v v_0 (|z|+h)x + v_0^2 x^2]} \left[ \frac{v_0^2 x - v v_0 (|z|+h)}{\sqrt{v_0^2 + v^2}} - \frac{v_0 (|z|+h)x - v (|z|+h)^2}{\sqrt{(|z|+h)^2 + x^2}} \right]$$

donde  $v_0 = 2/\mu_0 \sigma d$

$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  Tesla m / Ampere, la permeabilidad del vacío (de tablas);

$\sigma = 1.59 \cdot 10^7 / \Omega m$ , la conductividad del disco de bronce (de tablas);

$d = 2 \pm 0.1$  mm, el espesor del disco

$v$  es la velocidad del imán.

$h$  es la distancia entre el imán y el disco.

La construcción de la expresión anterior con el modelo de Maxwell puede verse en el apéndice.

El campo magnético generado por las corrientes parásitas se calcula como  $B = -\nabla \Phi_i$ .

Las figuras 1 y 2 muestran la componente  $z$  del campo producido por corrientes parásitas (equivalente al producido por los monopolos imagen de Maxwell) en función de  $v_0$  y  $v$ .

Se calculó el valor de  $v_0$ , resultando  $v_0 = 50 \pm 2.5$  m/seg

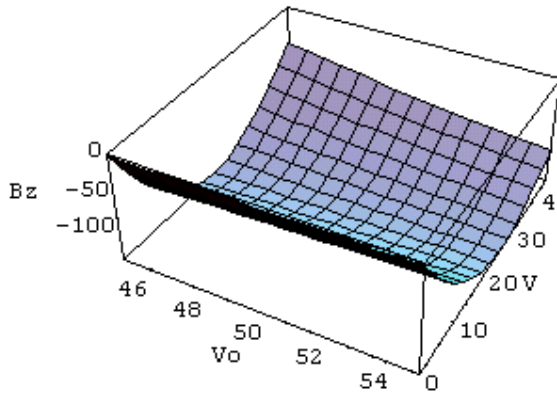


Figura 1. Componente z del campo magnético en función de  $v_0$  y  $v$  para  $x < 0$  (atrás).

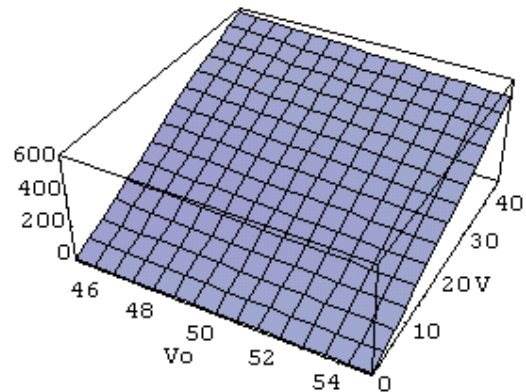


Figura 2. Componente z del campo magnético en función de  $v_0$  y  $v$  para  $x > 0$  (adelante).

Se puede observar que según el modelo teórico existe una asimetría en la dirección  $x$ . Mientras  $B_z$  crece con la velocidad para las  $x$  positivas (adelante), decrece con la velocidad para las  $x$  negativas (atrás),  $x=0$  es la posición del imán. Esto muestra que hay una asimetría entre las corrientes de adelante y atrás.

Las fuerzas de levitación ( $F_L$ ) y freno ( $F_F$ ) para un imán sobre un disco rotante están dadas por

$$F_L = \frac{3 \cdot \mu_o \cdot m^2}{32 \cdot \Pi \cdot h^4} \left( 1 - \frac{v_o}{\sqrt{v_o^2 + v^2}} \right)$$

$$F_F = \frac{v_o}{v} \cdot F_L$$

donde  $m$  es el momento magnético del imán.

La fuerza radial ( $F_R$ ) para velocidades bajas tendrá la misma dependencia funcional

$$F_R = - \frac{\mu_o \cdot q^{*2} \cdot r \omega^2}{4 \Pi \cdot 4 h v_o^2}$$

en  $v_0$ ,  $v$  y  $r$  que

donde

$\omega$  es la velocidad angular del disco

$r$  es la posición radial del imán.

Para velocidades chicas  $(v/v_0)^2 \ll 1$

$$1 - \frac{v_o}{\sqrt{v^2 + v_o^2}} \cong \frac{1}{2} \frac{v^2}{v_o^2}$$

entonces

$$F_L \cong \frac{3\mu_o m^2}{32\pi h^4} \frac{1}{2} v_o^2$$

y tendrá dependencia cuadrática con la velocidad.

Una exposición formal del método de imágenes, incluyendo las condiciones de contorno y la demostración de la unicidad del potencial hallado puede verse en las referencias (1) y (2).

### Desarrollo

El dispositivo utilizado para medir la fuerza de repulsión entre el imán y el disco rotante, está constituido por un brazo sostén del cual se sujetó un motor. En el eje de este último se colocó un disco de bronce con un suplemento de aluminio.

El motor estaba conectado a un chopper que regulaba la frecuencia de giro.

Se apoyó el imán sobre una mesita de altura regulable colocada sobre una balanza de rango 0.01g (figura 3).

Para medir el campo magnético se utilizaron dos puntas hall, colocadas a una distancia  $z$  del disco y en forma paralela al plano de éste, de forma tal que midiera la componente  $z$  del campo magnético.

Tanto las sondas hall como el imán estaban ubicados en la misma posición angular y radial, pero en lados opuestos del disco. Cada punta hall estaba conectada a una fuente de corriente continua (5v) y a un milivoltímetro que medía una diferencia de potencial eléctrico proporcional al campo magnético.

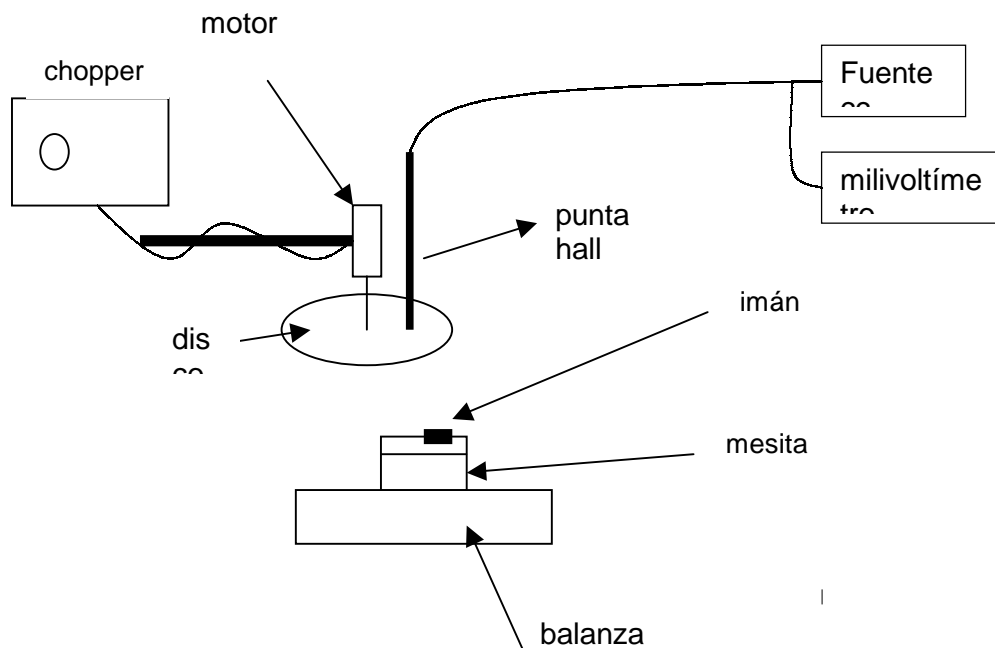


Figura 3. Esquema del dispositivo experimental utilizado.

Se calibró el chopper midiendo el período de rotación del disco con un photogate. La relación entre la velocidad angular medida ( $w$ ) y la frecuencia del chopper ( $f$ ) resultó lineal quedando determinada la velocidad angular del disco como  $w = m \cdot f$  donde  $m$  es la pendiente del gráfico frecuencia del chopper vs. velocidad angular medida.  
 $m = 0.41 \pm 0.01$  [divisiones / segundo]

Para caracterizar el comportamiento de la fuerza en función de la velocidad angular del disco se realizaron varias mediciones para diferentes radios y alturas del imán. La posición radial del imán se determinaba utilizando una escala solidaria al disco y la altura del imán se medía con una regla.

Una vez fijado el radio y la altura se aumentaba lentamente la frecuencia de giro, observando en la balanza el aumento del peso. La balanza estaba calibrada de forma tal que el peso medido era nulo cuando el disco se encontraba en reposo.

Se graficó la fuerza de repulsión en función de la velocidad angular y se ajustaron los resultados mediante una función cuadrática  $F = a \cdot w^2 + b \cdot w + c$  (Fig. 4)

Obteniéndose:

$$c = 787E-5 \pm 386E-5$$

$$b = 158E-5 \pm 4E-5$$

$$a = 1E-5 \pm 1E-7$$

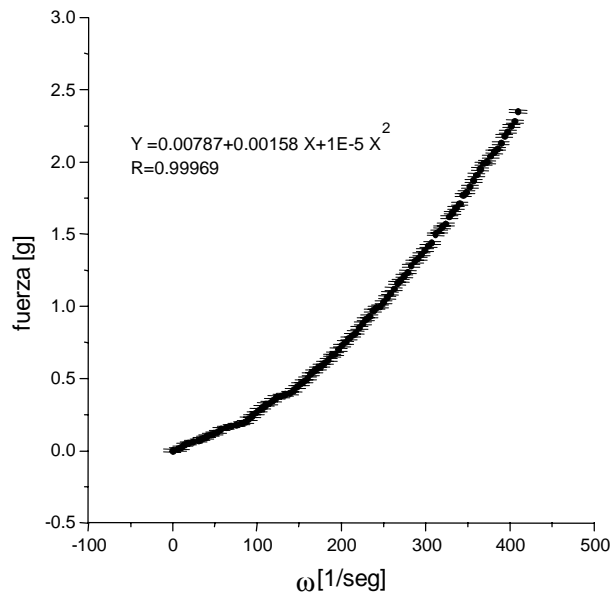


Figura 4 .Fuerza de repulsión en función de la velocidad angular.

Para medir el campo magnético se utilizaron distintas configuraciones de los sensores hall:

- i) Ubicándolos a una altura  $z$  sobre el disco alineados en forma radial con el imán, a cada lado de éste.
- ii) Ubicándolos a una altura  $z$  sobre el disco, en el mismo radio que el imán y a ambos lados del imán respecto de su posición angular (adelante – atrás). Fig. 5 y 6.
- iii) Ubicándolos a una altura  $z$  sobre el disco, en el mismo radio que el imán y ambos sensores en la posición marcada como adelante en la figura 5.

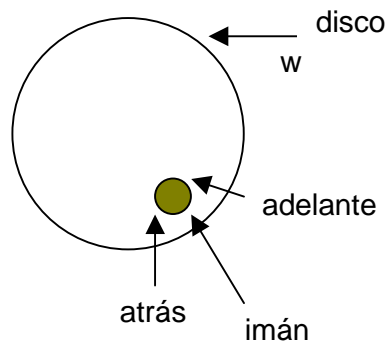


figura 5.

iv) Idem anterior pero ambos sensores ubicados atrás.

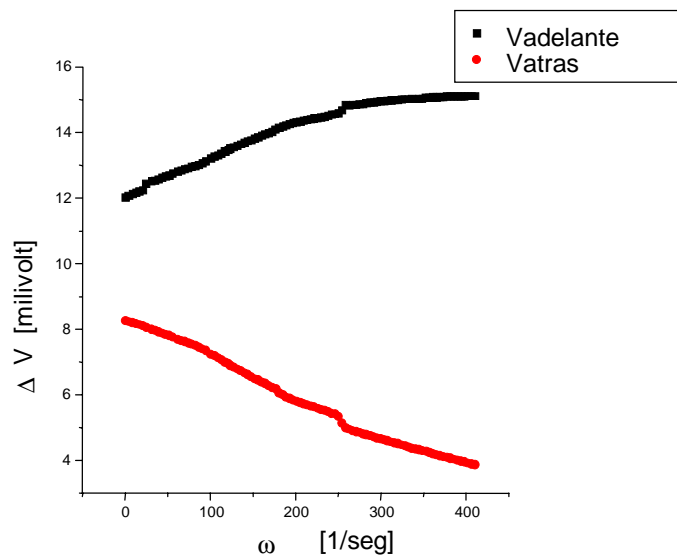


Figura 6 .Campo magnético "adelante" y "atrás" en función de la velocidad angular

## Conclusiones

A pesar de la inestabilidad del dispositivo experimental utilizado, se observa una notable asimetría entre los campos magnéticos medidos adelante y atrás. El campo magnético adelante crece al aumentar la velocidad, mientras que el de atrás decrece en las mismas condiciones. Esto concuerda con lo esperado teóricamente.

La inestabilidad se debe principalmente a dificultades de armado, por ejemplo el soporte utilizado no era suficientemente masivo como para evitar vibraciones. Además, éste presentaba resonancias en el rango de frecuencias angulares del disco utilizadas para medir.

Otro parámetro importante es la nivelación del disco que depende de su unión con el eje del rotor. El disco debe rotar con su momento principal de inercia paralelo al eje del motor y de forma tal que la distancia disco-imán sea constante (la superficie del disco debe quedar paralela a la superficie del imán).

Se presentaron numerosas dificultades en la medición de la diferencia de potencial con las sondas Hall debido a la alta sensibilidad del instrumento y la poca estabilidad del sistema disco-imán.

Se verificó la dependencia cuadrática existente entre la fuerza de repulsión y la velocidad de acuerdo con lo predicho por el modelo teórico para velocidades chicas. Se realizaron mediciones de la fuerza de repulsión en función de la velocidad para distintos radios y alturas pero, basándonos en las pocas mediciones realizadas, nada puede concluirse sobre la dependencia de la fuerza de repulsión con la altura o el radio.

## Apéndice.

### Método de imágenes de Maxwell.

Vamos a aplicar el método de “imágenes que retroceden”, al caso más simple: la generación espontánea a  $t=0$ , de un monopolo magnético  $q^*$  a una altura  $h$  sobre una lámina de conductor (puede simularse con un solenoide largo de radio mucho menor que su longitud, donde uno de sus extremos esté a una altura  $h$  y el otro a una altura mucho mayor que  $h$ ). La lámina de conductor tendrá una conductividad  $\sigma$  y un espesor  $d$ .

De acuerdo con la construcción del método de imágenes, **para un observador situado debajo del conductor, el campo magnético debido a las corrientes inducidas será equivalente al generado por un monopolo imagen  $-q^*$  que, a  $t=0$ , estará ubicado sobre el monopolo fuente**, cancelando el efecto del monopolo fuente. De esta forma, al menos inicialmente, no habrá cambio en el flujo magnético dentro del conductor.

La segunda parte del método se aplica solo para configuraciones planas y delgadas. **Los monopolos imagen “retroceden” desde la superficie del conductor hacia el infinito con una velocidad característica**

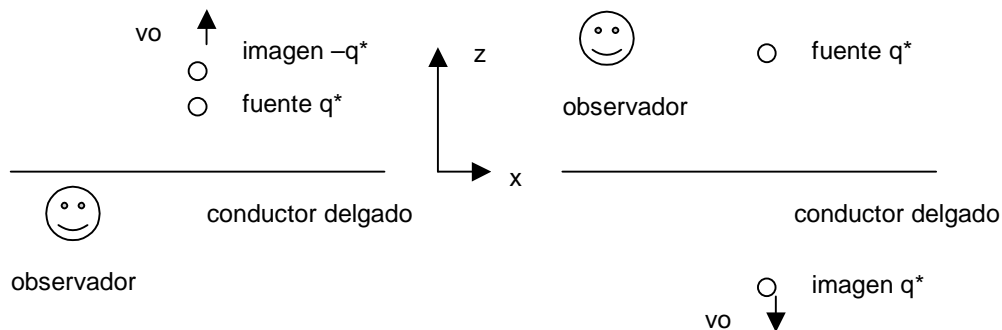
$$v_o = 2/\mu_0 \sigma d$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío.

Como **las imágenes se alejan de la superficie del conductor**, las corrientes parásitas decaen, y el campo magnético penetra en el conductor.

Para un observador por encima del conductor, el campo magnético debido a las corrientes inducidas será equivalente al generado por un monopolo imagen  $q^*$  que, a  $t=0$ , estará ubicado a una distancia  $h$  por debajo del conductor.

(Notar que el signo de los monopolos imagen depende de la posición del observador).

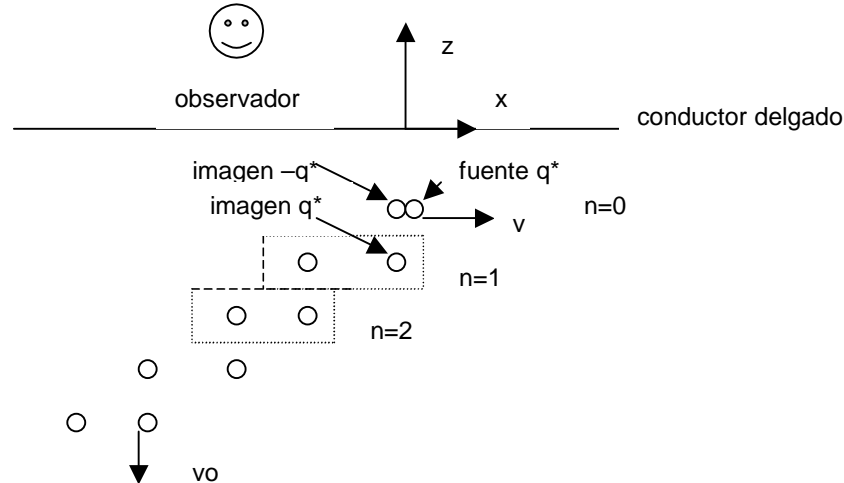


Entonces, el potencial y el campo magnético de la carga imagen serán:

$$\Phi_i = \frac{\mu_o}{4 \cdot \Pi} \frac{q^*}{(|z| + h + v_o \cdot t)}$$

$$B_i = \frac{\mu_o}{4.\Pi} \frac{q^*.sg(z)}{(|z|+h+v_o.t)^2}$$

Como segunda aplicación consideraremos el método de imágenes de Maxwell para calcular la fuerza de levitación y freno sobre un monopolo moviéndose a velocidad  $v$  constante paralelo a una lámina de conductor a una altura  $h$ . **Se crearán pares de imágenes de carga opuesta a medida que se mueve el monopolo fuente, produciéndose así dos trenes de imágenes.**



En el límite  $v \gg v_o$  las imágenes prácticamente se cancelan excepto la última imagen positiva. Así, para  $v \gg v_o$  la lámina de conductor se comporta como un superconductor y repele el monopolo fuente con un monopolo imagen.

Para el caso general, sumando explícitamente sobre las imágenes generadas en diferentes instantes  $n\tau=t'$ , pasando al límite continuo  $\Delta n.\tau = dt'$  queda

$$\Phi_i(x+vt,0,z,t) = \frac{\mu_o q^*}{4\Pi} \sum_n \left[ \frac{1}{\sqrt{(|z|+h+nv_o\tau)^2 + (x+nv\tau)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(|z|+h+nv_o\tau)^2 + (x+(n+1)v\tau)^2}} \right]$$

$$\Phi_i(x+vt,0,z,t) = \frac{\mu_o q^*}{4\Pi} \int_0^\infty \frac{(x+vt').v.dt'}{[(|z|+h+v_o t')^2 + (x+vt')^2]^{3/2}}$$

$$\Phi_i(x+vt,0,z,t) = \frac{\mu_o q^*}{4\Pi} \frac{v}{[(|z|+h)^2 v^2 - 2v v_o (|z|+h)x + v_o^2 x^2]} \left[ \frac{v_o^2 x - v v_o (|z|+h)}{\sqrt{v_o^2 + v^2}} - \frac{v_o (|z|+h)x - v (|z|+h)^2}{\sqrt{(|z|+h)^2 + x^2}} \right]$$

$$\Phi_i(vt,0,z,t) = \frac{\mu_o q^*}{4\Pi} \left( 1 - \frac{v_o}{\sqrt{v^2 + v_o^2}} \right)$$

La última ecuación está evaluada en  $x=0$  (posición del monopolo fuente).

Evaluando los gradientes del potencial en  $x=0$  y  $z=h$  se obtiene el campo magnético, y a partir de éste, las expresiones para la fuerza de levitación ( $F_L$ ) y la fuerza de freno magnético ( $F_F$ )

$$F_L = -q^* \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{\mu_o q^{*2}}{16\pi h^2} \left(1 - \frac{v_o}{\sqrt{v^2 - v_o^2}}\right)$$

$$F_F = -q^* \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\mu_o q^{*2}}{16\pi h^2} \frac{v_o}{v} \left(1 - \frac{v_o}{\sqrt{v^2 - v_o^2}}\right)$$

Consideraremos ahora las tres componentes de la fuerza de interacción para un monopolo a una altura  $h$  y radio  $r$  sobre un disco de radio  $a$ , de material no ferroso, rotando con velocidad angular  $w$  ( $w$  pequeña y  $r \ll a$ ).

En el régimen de velocidades bajas ( $(v/v_o)^2 \ll 1$ ),  $F_L$  y  $F_F$  pueden obtenerse de los resultados de movimiento rectilíneo. Considerando  $v=w.r$  queda

$$U = q^* \cdot \Phi_i(vt, 0, z, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q^{*2} r^2 \omega^2}{2(z+h)v_o^2}$$

$$F_L = -\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q^{*2} r^2 \omega^2}{8h^2 v_o^2}$$

$$F_R = -\left. \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{z=h} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q^{*2} r \omega^2}{4h v_o^2}$$

$$F_D = F_L \frac{v_o}{r\omega} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q^{*2} r \omega}{8h^2 v_o}$$

En el régimen de velocidades altas no pueden usarse los resultados de movimiento rectilíneo para obtener las fuerzas de interacción de las rotaciones.

Si bien las ecuaciones anteriores valen para monopolos, se puede demostrar que los resultados obtenidos para los dipolos magnéticos por superposición de monopolos, tienen la misma dependencia funcional en  $v_o$ ,  $v$  y  $r$  que los anteriores (ref. 3).

Para dipolos:

$$F_L = \frac{3 \cdot \mu_o \cdot m^2}{32 \cdot \pi \cdot h^4} \left(1 - \frac{v_o}{\sqrt{v_o^2 + v^2}}\right)$$

$$F_F = \frac{v_o}{v} \cdot F_L$$

## Referencias

1. Maxwell's theory of eddy currents in thin conducting sheets, and applications to electromagnetic shielding and MAGLEV. W.M.Saslow. Am.J.Phys. **60** (8) 1992.
2. Static and Dynamic Electricity. Smythe (Hemisphere, New York, 1989)
3. Forces on Moving Magnets due to eddy Currents. John R. Reitz. J. of App. Phys. **41** (5) 1970
4. Electromagnetismo y Materia. Feynman vol 2. Ed. Addison Wesley Iberoamericana
5. (5) Fundamentos de la teoría electromagnética. Reitz Milford and Christy. Ed. Addison Wesley Iberoamericana.