

# Redes resistivas infinitas

## Autores

Elizabeth Aballay  
elizabethaballay@hotmail.com

Eduardo Avilés  
dagored@sion.com

Laboratorio de Física II - 2° Año - Universidad Favaloro – septiembre 2002

## Resumen

En este trabajo se calcula la resistencia entre dos nodos arbitrarios de una red cuadrada infinita de resistencias idénticas. El método se basa en el trabajo de Atkinson y van Steenwijk<sup>[1]</sup> para este tipo de redes y otras con forma triangular y hexagonal.

## Introducción

Consideremos una red cuadrada infinita formada por resistores iguales, donde  $(n, p)$  es el nodo que está  $n$  unidades horizontales y  $p$  verticales de un nodo de referencia. Suponemos que la corriente de  $I_{np}$  amperes puede entrar al nodo  $(n, p)$  desde una fuente fuera de la red (ver figura 1).

Si el potencial en este nodo se denota por  $V_{np}$ , tenemos, por una combinación de las leyes de Ohm y de Kirchoff,

$$I_{n,p} = (V_{n,p} - V_{n+1,p}) + (V_{n,p} - V_{n-1,p}) + (V_{n,p} - V_{n,p+1}) + (V_{n,p} - V_{n,p-1})$$
$$I_{n,p} = 4V_{n,p} - V_{n+1,p} - V_{n-1,p} - V_{n,p+1} - V_{n,p-1},$$

donde, sin pérdida esencial de generalidad, tomamos cada resistor con un valor de 1 ohm. En general, se puede inyectar una corriente en cada nodo desde el exterior.

Buscaremos una representación integral para el potencial en el nodo  $(n,p)$  de la forma

$$V_{n,p} = \int_0^{2\pi} F(\beta) v_{n,p}(\beta) d\beta,$$

con

$$v_{n,p}(\beta) = e^{i|n|\alpha + ip\beta}, \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es una función de  $\beta$  que se especificará en breve. La representación es una transformada de Fourier (modificada): la razón para los signos de módulo para  $n$  estará clara dentro de poco.

Para  $n > 0$ , tenemos

$$4v_{n,p}(\beta) - v_{n+1,p}(\beta) - v_{n-1,p}(\beta) - v_{n,p+1}(\beta) - v_{n,p-1}(\beta) = e^{in\alpha + ip\beta} [4 - e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} - e^{-i\beta} - e^{-i\beta}]$$
$$= 2e^{in\alpha + ip\beta} [2 - \cos \alpha - \cos \beta].$$

Ahora pedimos que  $\alpha$  sea tal que

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \quad (2)$$

para que la combinación de  $v$ s desaparezca. Similarmente, encontramos los ceros para esta combinación si  $n < 0$ . Por eso, para cualquier  $F(\beta)$  integrable,  $I_{np} = 0$ , a menos que  $n = 0$ .

Para  $0 < \beta < 2\pi$ , no hay solución real para la ecuación (2), pero existe una solución compleja, mas aún es imaginaria pura, que es

$$\alpha = i \log \left[ 2 - \cos \beta + \sqrt{3 - 4 \cos \beta + \cos^2 \beta} \right] \quad (3)$$

Ahora consideremos el caso  $n = 0$ . Encontramos que

$$I_{0p} = \int_0^{2\pi} F(\beta) e^{ip\beta} [4 - 2e^{i\alpha} - 2\cos\beta] d\beta$$

$$I_{0p} = 2 \int_0^{2\pi} F(\beta) e^{ip\beta} [\cos\alpha - e^{i\alpha}] d\beta$$

$$I_{0p} = -2i \int_0^{2\pi} F(\beta) \sin\alpha e^{ip\beta} d\beta.$$

Estas corrientes pueden interpretarse como los coeficientes de la serie de Fourier

$$-2iF(\beta)\sin\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} I_{0p} e^{-ip\beta},$$

y podemos elegir los coeficientes como queramos, especificando  $-2iF(\beta)\sin\alpha$ . Sean  $I_{0p} = \delta_{0p}$ , esto es,  $I_{00}=1$  e  $I_{0p}=0$  si  $p \neq 0$ . Esto corresponde a la situación en la cual 1A entra en (0,0) y sale en el infinito, de ahí que ninguna corriente deja la red en ningún otro nodo finito. Con esta elección,

$$F(\beta) = \frac{i}{4\pi \sin\alpha},$$

y entonces

$$V_{n,p} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i|n|\alpha + ip\beta}}{\sin\alpha} d\beta. \quad (4)$$

La diferencia de potencial entre el origen y el nodo (n,p) es  $V_{00} - V_{n,p}$ . Esto no es exactamente la resistencia entre estos dos puntos; es en cierto grado la mitad de esa resistencia. Para ver esto, imaginemos por un momento que inyectamos 1A en el nodo (n,p) en vez de en el nodo (0,0), permitiendo que salga en el infinito. El nuevo potencial en (n,p) será ahora lo que antes llamamos  $V_{00}$  y el nuevo potencial en (0,0) será, por simetría, el que antes llamamos  $V_{n,p}$ . Evidentemente, la nueva diferencia de potencial entre el origen y (n,p) es justo la diferencia de potencial anterior cambiada de signo. Si elegimos extraer 1A del nodo (n,p) en vez de inyectarlo, todos los potenciales simplemente tendrán el signo cambiado, así que ahora la diferencia de potencial entre el origen y el nodo (n,p) es de nuevo  $V_{00} - V_{n,p}$ , igual a como era en la configuración original en la cual la corriente se inyectaba en (0,0). El paso final es explotar la linealidad de la ley de Ohm y superponer todas las corrientes y potenciales concernientes a la configuración en la cual 1A entra en (0,0) y aquella en la cual 1A deja la red en (n,p). La diferencia de potencial en este caso es  $2[V_{00} - V_{n,p}]$ , y es por eso igual a  $R_{n,p}$ . Entonces

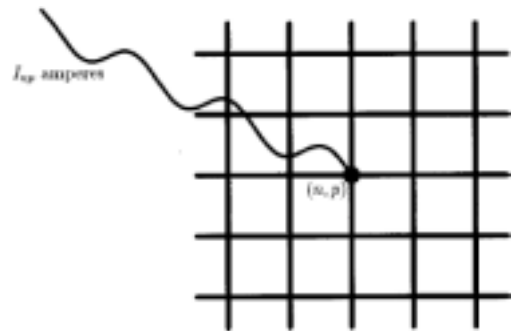


Figura 1 – Red cuadrada infinita en dos dimensiones

$$R_{n,p} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{-i|n|\alpha + ip\beta}}{\sin\alpha} d\beta. \quad (5)$$

A pesar de que la expresión (5) no se ve simétrica si intercambiamos n y p, sabemos de la simetría de la red que esto debe ser así. Una prueba formal de esto puede encontrarse en [1].

Podemos transformar la ecuación (5) en la forma manifiestamente real

$$R_{n,p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - e^{-|n|\alpha} \cos p\beta}{\sinh|\alpha|} d\beta. \quad (6)$$

En la tabla 1 se dan los resultados de una evaluación de la expresión (6) para valores de n y p entre 0 y 5. Tabla 1. Resistencia  $R_{n,p}$  en una red cuadrada infinita con resistencias iguales a 1ohm

	p					
n	0	1	2	3	4	5
0	0	1/2	2-4/π	17/2-24/π	40-368/3π	401/2-1880/3π
1	1/2	2/π	-1/2+4/π	46/3π-4	80/π-49/2	6646/15π-140
2	2-4/π	-1/2+4/π	8/3π	1/2+4/3π	6-236/15π	97/2-2236/15π
3	17/2-24/π	46/3π-4	1/2+4/3π	46/15π	24/5π-1/2	998/35π-8
4	40-368/3π	80/π-49/2	6-236/15π	24/5π-1/2	352/105π	1/2+40/21π
5	401/2-1880/3π	6646/15π-140	97/2-2236/15π	998/35π-8	1/2+40/21π	1126/315π

## Método Experimental

El experimento se desarrolló imprimiendo una grilla cuadrada de 15x15 cuadrados de 1cm de lado y 6 puntos de espesor de línea. En la figura 2 se muestra un segmento de esta grilla a tamaño real. La grilla se imprimió en una impresora de chorro de tinta, la cual tiene la característica de que su tinta es en cierto grado conductora de la electricidad.

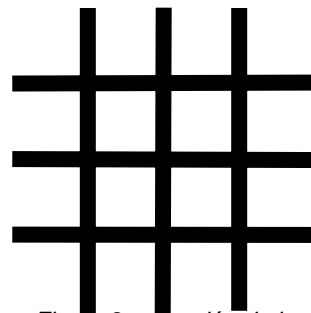


Figura 2 – Sección de la grilla usada en el experimento a tamaño real

A continuación se midió la resistencia de los segmentos extremos de la red en sentido vertical y horizontal, para saber qué valor de resistencia tienen estos segmentos. La resistencia de los segmentos individuales se muestra en la Tabla 2. Es notorio que la resistencia de estos segmentos es distinta horizontal que verticalmente. Esto puede deberse al papel o al proceso de impresión utilizado por la impresora, que imprime el largo de las líneas horizontales en una sola pasada, pero las líneas verticales las imprime en ancho.

Segmento	Resistencia [ $\times 10^6$ ohm]
Horizontal	1.12 $\pm$ 0.11
Vertical	0.69 $\pm$ 0.07

Tabla 2- Resistencia media de los segmentos de la grilla

Luego, se tomó un nodo de referencia (0,0) y se fue midiendo la resistencia de los nodos (n,p) con respecto a ese nodo, llegando hasta (n,p)=(5,5). Esto se realizó varias veces tomando distintos nodos de referencia (0,0) y con los datos obtenidos de cada medición se calculó su valor medio y error.

## Resultados

Los valores de resistencia obtenidos se muestran en la Tabla 3. Los valores teóricos se calcularon de la siguiente forma: para los valores de resistencia horizontales y verticales, se multiplican los valores medios medidos por el valor teórico obtenido para una resistencia de 1 ohm de la Tabla 1, que llamaremos coeficiente de "escala". Para los valores en que n=p, se realiza un promedio entre los valores medios medidos y se multiplica por los coeficientes de escala correspondientes. Para los demás valores, se realiza un promedio tomando n veces la resistencia media horizontal y m veces la resistencia media vertical, y luego se multiplica por su coeficiente de escala correspondiente. Los valores Teóricos se ilustran en la Tabla 4.

	p	1	2	3	4	5
n	Origen	0.38 $\pm$ 0.02	0.53 $\pm$ 0.02	0.68 $\pm$ 0.02	0.75 $\pm$ 0.03	0.84 $\pm$ 0.03
1	0.42 $\pm$ 0.03	0.50 $\pm$ 0.02	0.58 $\pm$ 0.02	0.71 $\pm$ 0.04	0.80 $\pm$ 0.04	0.88 $\pm$ 0.05
2	0.54 $\pm$ 0.02	0.45 $\pm$ 0.03	0.50 $\pm$ 0.02	0.74 $\pm$ 0.03	0.82 $\pm$ 0.04	0.91 $\pm$ 0.05
3	0.65 $\pm$ 0.02	0.48 $\pm$ 0.03	0.68 $\pm$ 0.01	0.77 $\pm$ 0.04	0.83 $\pm$ 0.02	0.91 $\pm$ 0.04
4	0.71 $\pm$ 0.02	0.74 $\pm$ 0.06	0.69 $\pm$ 0.04	0.70 $\pm$ 0.02	0.77 $\pm$ 0.06	0.92 $\pm$ 0.02
5	0.77 $\pm$ 0.01	0.79 $\pm$ 0.06	0.73 $\pm$ 0.03	0.78 $\pm$ 0.05	0.85 $\pm$ 0.01	0.88 $\pm$ 0.02

Tabla 3 – Valores Experimentales de la resistencia de un origen arbitrario a distintos nodos ( $\times 10^6$ ohm)

Podemos observar comparando las tablas 3 y 4 que los valores experimentales de las resistencias son menores que los calculados teóricamente. En el gráfico 1 podemos observar las curvas teórica y experimental de los valores de resistencia del origen a los nodos (n,p) para p=0 en función de n. Se observa claramente que los valores medidos experimentalmente son menores a los calculados teóricamente.

Introduciendo un "factor de corrección", llamémoslo Aleph ( $\aleph$ ), podemos aproximar los resultados experimentales a la teoría. Este factor es un número que multiplica a cada valor de resistencia haciendo que el error cuadrático medio sea mínimo.

	p	1	2	3	4	5
n	Origen	0.56 $\pm$ 0.11	0.82 $\pm$ 0.11	0.97 $\pm$ 0.11	1.07 $\pm$ 0.11	1.15 $\pm$ 0.11
1	0.34 $\pm$ 0.07	0.58 $\pm$ 0.13	0.76 $\pm$ 0.17	0.89 $\pm$ 0.20	1.00 $\pm$ 0.23	1.09 $\pm$ 0.26
2	0.5 $\pm$ 0.07	0.64 $\pm$ 0.15	0.77 $\pm$ 0.13	0.88 $\pm$ 0.21	0.97 $\pm$ 0.24	1.05 $\pm$ 0.27
3	0.59 $\pm$ 0.07	0.70 $\pm$ 0.16	0.80 $\pm$ 0.20	0.88 $\pm$ 0.13	0.96 $\pm$ 0.25	1.03 $\pm$ 0.27
4	0.66 $\pm$ 0.07	0.75 $\pm$ 0.18	0.83 $\pm$ 0.21	0.90 $\pm$ 0.24	0.97 $\pm$ 0.13	1.03 $\pm$ 0.28
5	0.70 $\pm$ 0.07	0.78 $\pm$ 0.19	0.85 $\pm$ 0.22	0.92 $\pm$ 0.25	0.98 $\pm$ 0.27	1.03 $\pm$ 0.13

Tabla 4 – Valores Teóricos de la resistencia de un origen arbitrario a distintos nodos ( $\times 10^6$ ohm)

A medida que vamos tomando valores de resistencia con respecto al origen en nodos en que va aumentando la "verticalidad" de la línea que une los nodos diagonales, este factor de corrección se va haciendo más chico. Al llegar a los nodos de la forma (0,p), este factor desaparece. Esto se puede ver en el gráfico 2, en donde los datos experimentales concuerdan con los teóricos dentro del error experimental. En el gráfico 1,  $\aleph$

tiene un valor de 1.47. La disminución de  $R$  es casi lineal a medida que crece la verticalidad. Esto puede deberse a que la grilla en la que se realizó el experimento no es realmente infinita, sino que tiene un tamaño bien definido.

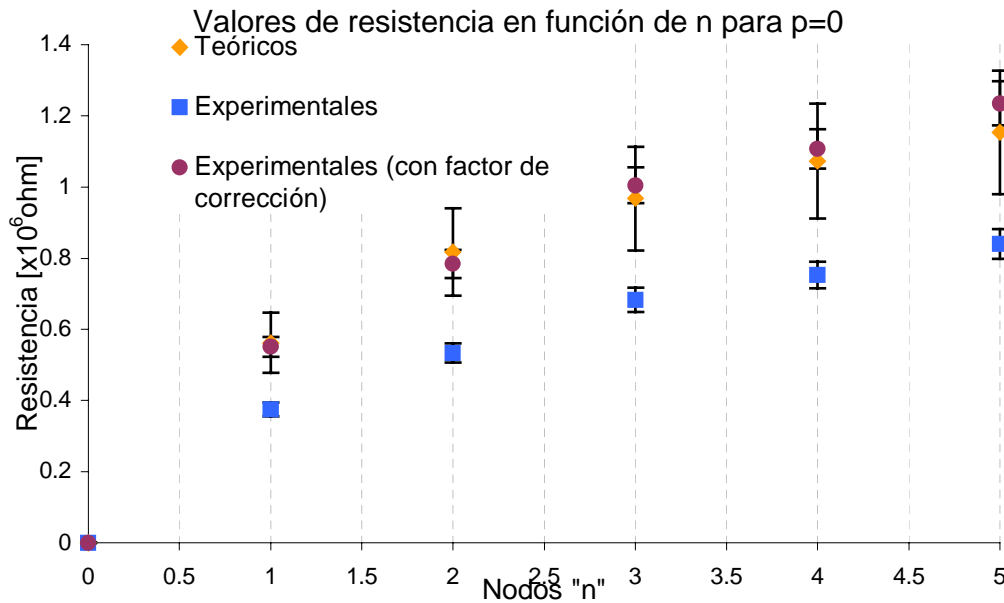


Gráfico 1 – En este gráfico vemos que los valores experimentales no concuerdan con los teóricos a menos que apliquemos un factor de corrección, que en este caso es de 1.47.

## Conclusiones

Del análisis de los datos obtenidos por medio del experimento, podemos concluir que la base teórica para las redes infinitas cuadradas de resistencias no se pudo demostrar experimentalmente para todos los casos. O bien se necesite una grilla aún mas grande, o la teoría no contempla la “finitud” de la red.

Para valores de resistencia medidos entre el origen y nodos entre la vertical al origen y la diagonal en que  $n=p$ , los resultados experimentales se ajustan dentro del error experimental. Para los demás valores de resistencia, fue necesario introducir  $K$  (un factor de corrección) para que los datos experimentales se ajusten a la teoría. Esta diferencia puede deberse a que la resistencia en sentido vertical no es la misma que la resistencia en sentido horizontal.

Otra causa por la que pudo fallar el ajuste de los datos experimentales a la teoría fue que para calcular la

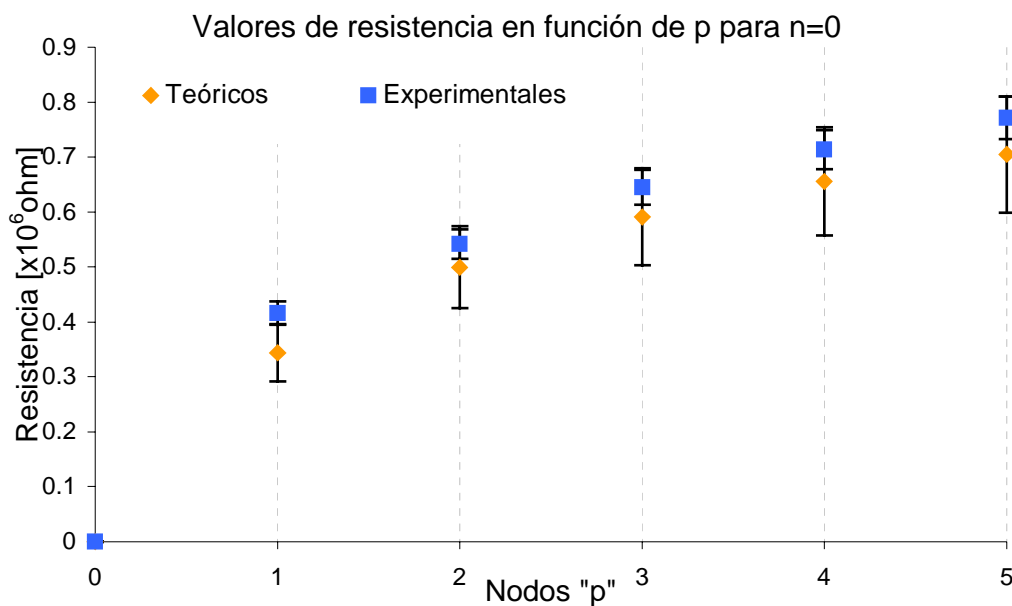


Gráfico 2 – En este gráfico vemos que los valores experimentales concuerdan dentro del error experimental con los teóricos. El factor de corrección sería cercano a la unidad.

resistencia del origen a los nodos  $(n,p)$  de forma teórica se usaron datos experimentales. Esto se observa claramente en los errores de los valores teóricos de resistencia de la tabla 4, que en algunos casos superan el 20%.

## **Referencias**

[1]. D. Atkinson y F. J. van Steenwijk, "Infinite Resistive Lattices" Am. J. Phys. **67** (6), 486-492 (1999).

## **Bibliografía**

1. Gil, S. y Rodríguez E., *Física re-Creativa*, 1ra. Ed.- Buenos Aires: Prentice Hall, 2001.
2. Sears, F. *Et al*, *Física Universitaria Vol.2*, 9a. Ed.- México: Addison Wesley Longman, 1999.