

## Estudio de circuitos RLC libres y forzados

Luciano Perez, Horacio Peralta, Ricardo Bianchi  
[perezleonardoe@arnet.com.ar](mailto:perezleonardoe@arnet.com.ar), [ericardob@yahoo.com.ar](mailto:ericardob@yahoo.com.ar)  
 Lab. 3, Noviembre 2003 - UBA

**Resumen:** En esta experiencia estudiamos las diferentes respuestas del circuito RLC serie para los casos de oscilaciones libres y forzadas. Para este último se hace hincapié en el estudio de la condición de resonancia.

### Introducción

El propósito de esta experiencia es realizar un estudio de los circuitos RLC serie tanto en el caso de oscilaciones libres como forzadas.

En el caso de oscilaciones libres subamortiguadas la respuesta del circuito (figura 1) puede modelarse por una función sinusoidal modulada en amplitud por una exponencial decreciente, cuya forma estará determinada por la relación de los valores de R, L y C según,

$$q(t) = q_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

donde  $\gamma = R/2L$  y  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$  y  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ . Para el caso de  $R > R_{crit} = 2(L/C)^{1/2}$  se obtienen oscilaciones sobreamortiguadas cuya forma viene descrita por

$$q(t) = q_{01} e^{-r_1 t} + q_{02} e^{-r_2 t}$$

donde los parámetros  $r_1$  y  $r_2$  son la soluciones de la ecuación  $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$ .

Otro caso de interés es el estudio de la respuesta del circuito RLC forzado. Si al circuito se lo alimenta con una señal  $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ , entonces resulta que

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t - \phi)$$

donde  $i_0 = V_0 / \text{Abs}(Z)$ ,  $\phi$  el argumento de  $Z = R + j(L\omega - 1/\omega C)$ , expresión conocida como impedancia compleja.

### Procedimiento Experimental.

#### Oscilaciones libres

Para estudiar las oscilaciones libres diseñamos un circuito cuyo esquema se muestra en la figura 1, asignando a los parámetros involucrados los siguientes valores:

$$\begin{aligned} C &= 0,6 \pm 0,1 \mu\text{F} \\ L &= 0,38 \pm 0,01 \text{ H} \\ R &= r + r_L = (232,3 \pm 0,1) \Omega \end{aligned}$$

Donde  $r_L$  es la resistencia de la inductancia L y r la resistencia utilizada en serie.

Con estos parámetros se obtienen los valores teóricos  $\omega_0 = (2094 \pm 202) \text{ Hz}$ ,  $\omega = (2072 \pm 203) \text{ Hz}$ ,  $\gamma = (305 \pm 8) \text{ Hz}$ ,  $R_{crit} = (1592 \pm 154) \Omega$ .

Fijando en el sistema de adquisición de datos una frecuencia de muestreo de 12 KHz, que según el principio de Nyquist (cfr. [1]) será suficiente para reconstruir la señal, enviamos una señal cuadrada de periodo mucho mayor que el estimado teóricamente para las oscilaciones libres, levantando una serie de lecturas de la intensidad de corriente en función del tiempo cuyo resultado se ve en la figura 2

Integrando  $i(t)$  podemos graficar la función  $q(t)$  que representa la carga (figura 3).

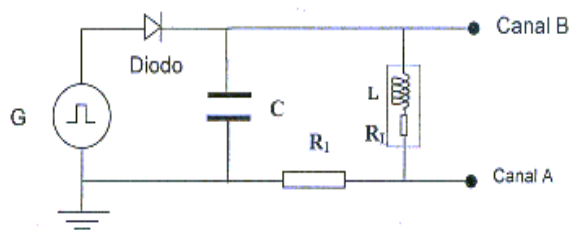


Figura 1: Circuito RLC serie

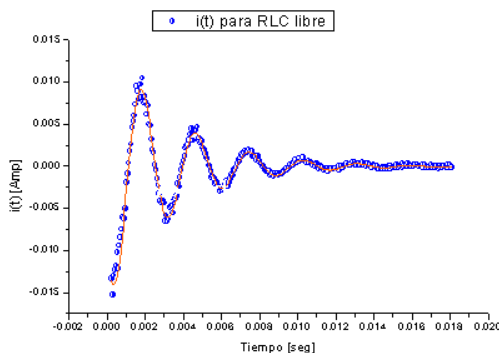


Figura 2: Respuesta en corriente del circuito RLC libre. La curva continua representa el ajuste realizado en Excel minimizando  $\chi^2$ .

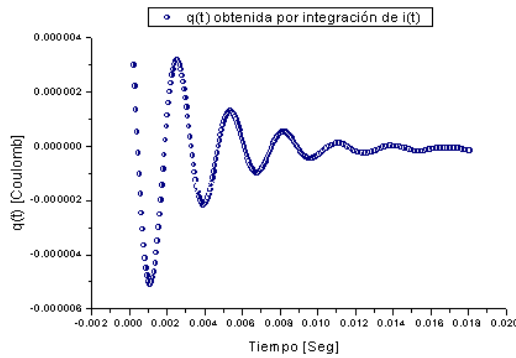


Figura 3:  $q(t)$  para el circuito RLC libre.

Ajustando con el Excel los datos experimentales encontramos un valor experimental para  $\omega=2216\text{Hz}$  que concuerda con el valor estimado teóricamente de  $\omega=(2072\pm 203)$ . La obtención del error de esta magnitud es de una complejidad considerable y excede el objetivo de este trabajo. El valor encontrado de  $\gamma=299.5\text{Hz}$  también se ajusta al valor teórico  $\gamma=(305\pm 8)\text{Hz}$ . Se puede ver además que una variación en la frecuencia de la señal cuadrada no influye en los resultados observados para la frecuencia de oscilación de la corriente, por el hecho de que en la descarga, el circuito está libre de fuerzas externas. Variando la amplitud de dicha señal se observan variaciones en la amplitud de la oscilación sin afectar los parámetros antes calculados. Con los valores obtenidos para  $i(t)$  y  $q(t)$  construimos el diagrama de Bode representado en la figura 4.

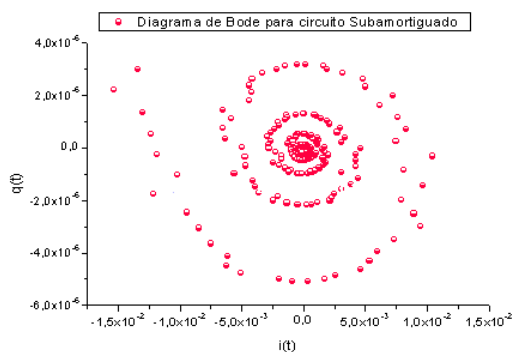


Figura 4: Se observa el espiral característico de las oscilaciones amortiguadas

Desde el punto de vista físico el diagrama de fases permite conocer el comportamiento del sistema para cada conjunto de condiciones iniciales, es decir cada curva de éste representa una trayectoria posible del sistema. En la figura 5 se mostró esta

trayectoria correspondiente a nuestras condiciones iniciales.

Por otro lado se observa que al fijar  $R=2\text{K}\Omega$  mayor que el valor  $R_{\text{crit}}=(1592\pm 154)\Omega$  se obtienen *oscilaciones sobreamortiguadas* como se aprecia en la figura 5.

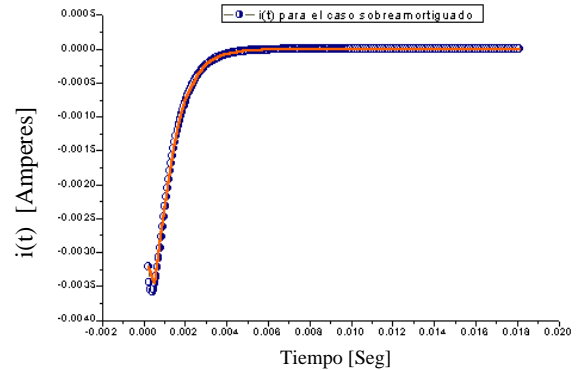


Figura 5:  $i(t)$  caso Sobreamortiguado.

Data: Data2\_C  
Model: ExpDecay2  
Equation:  $y = A1*\exp(-x/t1) + A2*\exp(-x/t2)$

|    |          |    |
|----|----------|----|
| A1 | 0.03079  | -- |
| t1 | 0.00023  | -- |
| A2 | -0.01152 | -- |
| t2 | 0.00086  | -- |

De lo que se deduce que los exponentes del ajuste son  $r_1=1/t1=4347.82\text{Hz}$ ,  $r_2=1/t2=1162.79\text{Hz}$  que concuerdan con los valores esperados de la fórmula

$$-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

que son  $r_1=4304\pm 103\text{ Hz}$  y  $r_2=1106\pm 61\text{ Hz}$ .

### Oscilaciones forzadas

Para el estudio de la respuesta del circuito RLC serie forzado contamos con el circuito que se presenta en la figura 6 en donde los valores son  $L=0,306\pm 0,003\text{H}$   $C=8,93\pm 0,02\mu\text{F}$ ,  $R_L=132,5\pm 0,1\Omega$  y  $R=20,2\pm 0,1\Omega$ . A partir de estos datos se encuentra que la impedancia compleja es (en función de la frecuencia del GF):  $Z(\omega)=R+j(\omega L-1/\omega C)=152,9+j(\omega*0,306-1/\omega*8,93\text{E}-6)\Omega$ .

Comenzamos por forzar el circuito con una señal de amplitud  $V_0=6\text{V}$  y una frecuencia  $\omega=320\text{Hz}$ . Utilizando el sistema de adquisición de datos tomamos medidas para la corriente del circuito y para la señal enviada.

Como se observa en la figura 7, ambas señales tienen forma sinusoidal y coinciden en frecuencia, como cabe esperar en el estado estacionario para las oscilaciones amortiguado-forzadas.

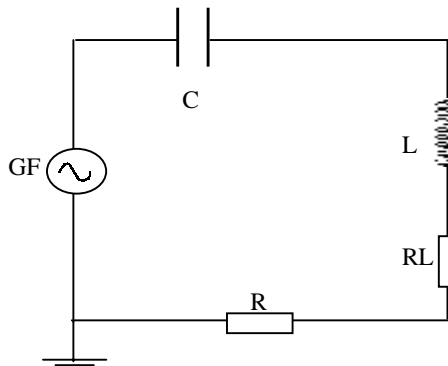


Figura 6 Circuito RLC serie forzado

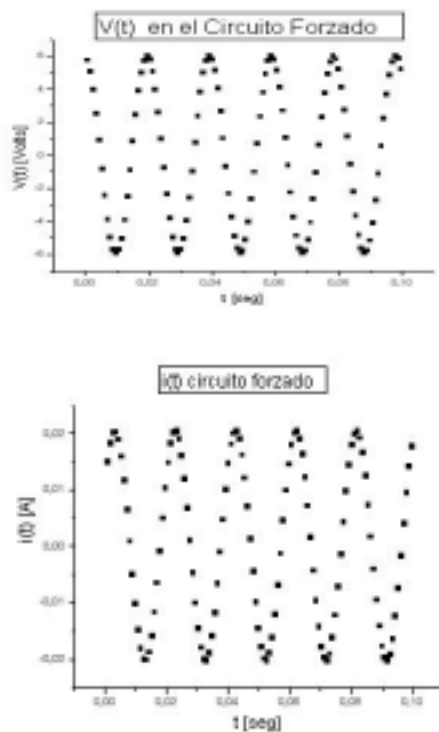


Figura 7: Señal y respuesta de un RLC serie forzado

El valor de la amplitud  $I_0=0,021\text{A}$  concuerda, dentro del margen de error, con el valor teórico esperado de  $V_0/\text{Abs}[Z(320)]=0,020\pm 0,003\text{ A}$ . Para determinar la diferencia de fase entre la señal  $V(t)$  y la respuesta  $i(t)$  construimos el diagrama de fase que se observa en la figura 8

A partir del análisis del patrón de Lissajous encontramos que la fase es de  $\alpha=1,044$  valor que

entra en el intervalo de incerteza para el valor esperado  $\text{Arg } Z(320)=1,03\pm 0,02\text{ rad}$ .

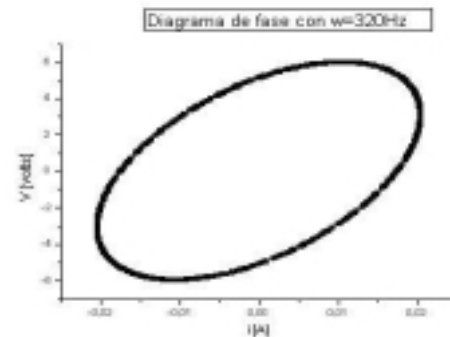


Figura 8: Diagrama de fase  $i(t)$ - $V(t)$

Variamos ahora la frecuencia de la señal del GF, buscando encontrar el valor máximo para  $I_0/V_0$ , es decir, la frecuencia que maximiza la amplitud de la respuesta del circuito, conocida como frecuencia de resonancia (ver Apéndice).

Encontramos el máximo de amplitud de respuesta para un valor  $\omega_{\text{resexp}}=587,35\text{Hz}$  que se encuentra dentro de lo esperado teóricamente  $\omega_{\text{resterór}}=605\pm 52\text{ Hz}$ .

Para la frecuencia hallada encontramos, mediante el método del diagrama de fases que la diferencia de fase entre la señal y la respuesta del circuito es muy pequeña, ya que el mismo se aproxima a un segmento recto.

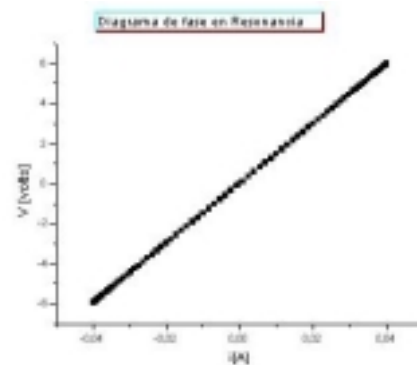
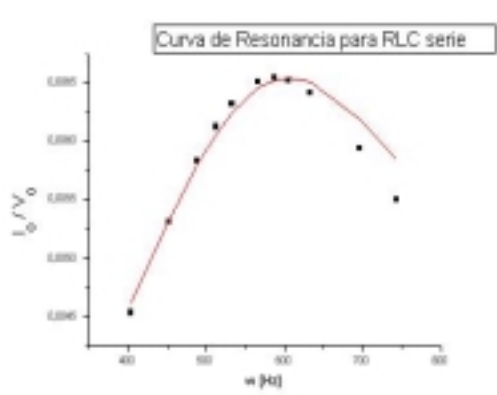


Figura 9: Diagrama de fases en resonancia

Variando la frecuencia en torno a la de resonancia, podemos dibujar el gráfico de  $I_0/V_0(\omega)$ , conocido como *curva de resonancia*.

Al comparar los resultados experimentales con el valor esperado por la teoría, encontramos que el ajuste es bastante bueno. El valor de la frecuencia de resonancia experimental está ligeramente a la

izquierda del teórico, pero los puntos obtenidos para frecuencias menores se ubican bastante cerca de la curva.



**Figura 10:** Curva de resonancia. La curva — es la expectativa teórica.

Para valores mayores que la  $\omega_{res}$  los valores obtenidos parecen ubicarse por debajo de la curva teórica, divergencia que puede explicarse por una subestimación de L en la medición.

### Conclusiones

En la primera parte observamos que el comportamiento del circuito RLC libre se ajustaba, dentro del margen de error, a lo predicho por la teoría, por lo cual podemos juzgar que el método experimental utilizado para estudiar el circuito es bastante satisfactorio.

En la segunda parte encontramos que la frecuencia de resonancia experimental era un poco menor a la esperada, aunque no estuvo fuera del intervalo de incertidumbre. Por otra parte, la curva de resonancia teórica se desviaba ligeramente de lo esperado para frecuencias mayores a  $\omega_{res}$ , pero no debe olvidarse que la curva teórica tiene un error implícito en la medición de L, R y C. Por ello, no puede decirse que el método para encontrar la curva sea incorrecto.

A modo de ilustración, adjuntamos la fotografía del montaje experimental de la práctica



### Apéndice: Resonancia en un circuito RLC serie. [2]

Como vimos en la introducción la corriente en el circuito RLC forzado tiene una amplitud  $i_0 = V_0 / \text{Abs}(Z(\omega)) = V_0 / (R^2 + X^2)^{1/2}$ , donde  $X(\omega) = \omega L - (\omega C)^{-1}$  se conoce como *reactancia* del circuito.

Si  $\omega = \omega_0 = (LC)^{-1/2}$  entonces  $X(\omega) = 0$ , y de esta forma se define la *resonancia*.

Para esta frecuencia el circuito de la figura 6 adquiere características especiales:

- ✓ La reactancia se anula, de modo que la impedancia  $Z(\omega)$  es mínima y la corriente y la tensión están en fase (el circuito es puramente resistivo). Precisamente, la condición de que la excitación este en fase con la respuesta es la característica que define la resonancia.
- ✓ La amplitud de la respuesta ( $i_0(\omega)$ ) es máxima.
- ✓ La caída de potencial sobre C y L están desfasadas en  $\pi$ .
- ✓ La caída de potencial en la resistencia es igual a la fem aplicada.

### Bibliografía

- [1] Gil, S. y Rodríguez, E. *Física re-Creativa* Prentice Hall, Bs.As. 2001
- [2] Trelles, F.R. *Temas de electricidad y magnetismo* Eudeba, Bs. As. 1984
- [3] Hsu, H. *Análisis de Fourier* Pearson, Méx. 1998.