

# Análisis De La Dinámica De Un Sistema Mecánico No Lineal

Martín Richarte, Gabriela Vila  
Laboratorio 5, FCEyN, UBA – Marzo de 2004

Se analizó el movimiento de un sistema no lineal, compuesto de un péndulo sometido a un campo magnético y a un forzado externo. Se observaron varias características propias de la no linealidad, como sensibilidad a las condiciones iniciales, saltos en la amplitud, histéresis mecánica y movimiento caótico. Por último se obtuvo un modelo del potencial efectivo a partir de los datos experimentales, y se realizaron con el mismo simulaciones numéricas del movimiento. La dinámica predicha coincide cualitativamente con la observada.

## 1. Introducción

Definimos un sistema caótico<sup>[1]</sup> como aquel que presenta un comportamiento determinista, aperiódico y que exhibe sensibilidad ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales. El sistema es determinista ya que el comportamiento irregular del mismo se debe a la no linealidad de las ecuaciones, y no a la presencia de parámetros aleatorios. Pero a diferencia de un sistema lineal, no satisface el principio de superposición: su respuesta ante una excitación externa de frecuencia definida no es un movimiento con la misma frecuencia, sino con una superposición de frecuencias distintas. La aperiodicidad del movimiento se manifiesta en que, para tiempos grandes, las trayectorias no convergen a un punto fijo ni son periódicas o cuasiperiódicas. Además, las trayectorias correspondientes a condiciones iniciales cercanas divergen unas de otras en forma exponencial creciente. Este comportamiento se caracteriza mediante un parámetro definido positivo llamado coeficiente de Lyapunov. Algunos de los fenómenos típicos que se observan en este tipo de sistemas son la presencia de atractores, histéresis mecánica y duplicación del período de oscilación, una de las rutas más comunes hacia el caos.

El objetivo de este trabajo fue el estudio y modelado del movimiento de un sistema no lineal, en este caso un péndulo físico sometido además de la interacción gravitatoria, a un potencial de interacción magnética y un forzado externo<sup>[2]</sup>. Sus ecuaciones de movimiento predicen desde movimientos periódicos hasta caóticos.

Consideremos en primer lugar las distintas fuerzas que actúan sobre la barra. Estas se indican en la figura 1.

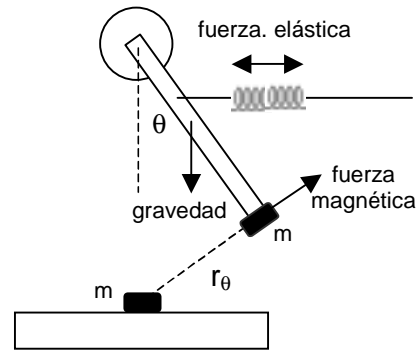


Figura 1: fuerzas que actúan sobre el péndulo.

La fuerza de repulsión entre los imanes se modeló considerando a los mismos como dipolos puntuales. Bajo estas hipótesis se obtiene una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r_\theta$  que los separa:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r_\theta^2} \hat{r} \quad (1)$$

Las constantes  $m_1$  y  $m_2$  son los momentos dipolares de los imanes, y en nuestro caso  $r_\theta$  vale

$$r_\theta^2 = (L \sin \theta)^2 + [d + L(1 - \cos \theta)]^2 \quad (2)$$

Aquí  $L$  es la longitud de la barra y la distancia  $d$  se indica en la figura 3. La fuerza externa puede aproximarse por una fuerza tipo elástica  $F = -kx$ , donde la distancia  $x$  varía armónicamente en el tiempo. Si llamamos  $\Omega$  a la frecuencia de excitación, obtenemos la siguiente expresión para la fuerza

$$F_{ext} = -kx_0 \sin(\Omega t) \quad (3)$$

Planteemos ahora la segunda Ley de Newton para el péndulo

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum \tau_{ext} \quad (4)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la barra calculado desde el pivote y  $\tau_{ext}$  los torques externos que actúan sobre la misma. En este caso consideraremos el torque producido por la gravedad, el campo magnético y el forzado exterior. Por último incluiremos un término que de cuenta del rozamiento existente en el sistema, ya sea producido por la fricción con el aire o entre los diferentes componentes mecánicos del dispositivo. Propondremos para este término una dependencia lineal con la velocidad angular  $\omega$  del péndulo.

La ecuación (4) de segundo orden se puede reducir a un sistema de tres ecuaciones de primer orden acopladas

$$\begin{aligned} \omega' &= -A \sin \theta + B \sin \phi - C\omega + \frac{|\theta|}{\theta} \frac{D}{r_0^2} \cos \alpha_\theta \\ \theta' &= \omega \\ \phi' &= \Omega \end{aligned} \quad (5)$$

Aquí  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son coeficientes que dependen de las propiedades de la barra y los imanes y de las fuerzas involucradas, y la función  $\alpha_\theta$  se define como

$$\alpha_\theta = \left[ \left| \theta \right| + \arctg \left( - \left| \frac{d + L(1 - \cos \theta)}{L \sin \theta} \right| \right) \right] \quad (6)$$

Este sistema de ecuaciones predice varios tipos de movimiento diferentes.

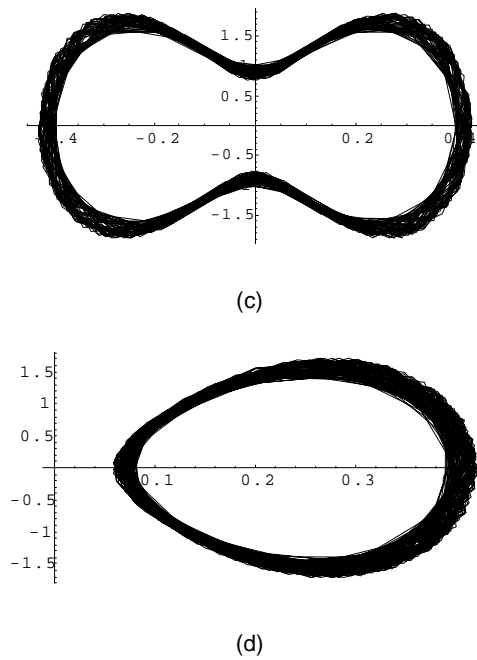
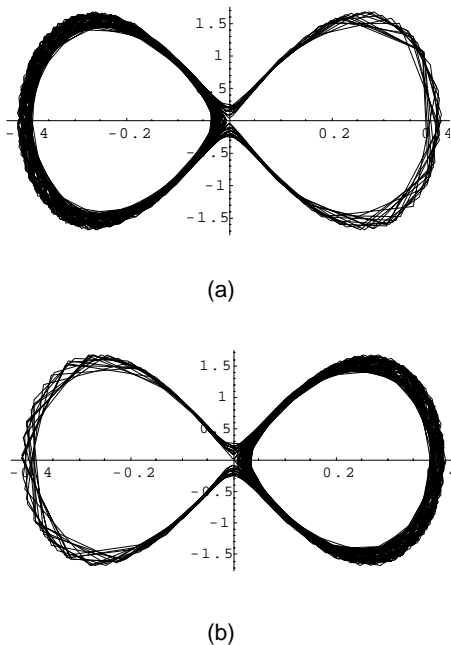


Figura 2: diagramas de fase obtenidos por simulación numérica a partir (5). Se observan: (a) y (b) oscilaciones entre ambos atractores, (c) movimiento periódico y (d) oscilaciones dentro de un atractor.

La figura 2 muestra diagramas de fase obtenidos mediante la resolución numérica del sistema (5). Según las condiciones iniciales, el movimiento puede ser de oscilación aleatoria entre los dos atractores como en (a) y (b), periódica alrededor de  $\theta=0$  como en (c), o confinada a un atractor como en (d).

Debido a que resulta difícil contrastar cuantitativamente las simulaciones numéricas con las curvas obtenidas en forma experimental, buscaremos corroborar al menos en forma cualitativa las predicciones teóricas anteriores.

## 2. Arreglo experimental

El dispositivo experimental se muestra en la figura 3.

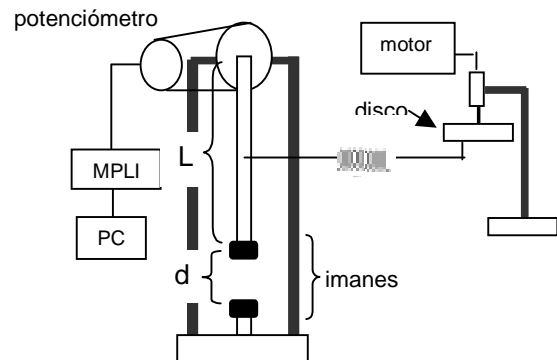


Figura 3: dispositivo experimental utilizado.

Se utilizó como péndulo físico una barra de aluminio de longitud  $L=(51,4\pm 0,1)\text{cm}$ ,  $(1,20\pm 0,60)\text{cm}$  de diámetro y masa  $M=(188,2\pm 0,1)\text{g}$ . En el extremo inferior de ésta se colocó un imán de neodimio de  $(1,2\pm 0,1)\text{cm}$  de diámetro y  $(0,60\pm 0,01)\text{cm}$  de alto. El campo en superficie del los mismos es de aproximadamente 3000G, y de unos 98G a 1,5cm. Se ubicó un segundo imán igual al anterior de forma tal que, cuando el péndulo se encuentra en su posición de equilibrio natural ( $\theta=0$  en la figura 1), ambos imanes estén separados por una distancia  $d$  sobre la vertical, como se indica en la figura 2. Los imanes se encontraban con sus polos iguales enfrentados para que la fuerza entre ellos fuera repulsiva. El forzado externo se generó mediante un resorte unido al péndulo a 10,2cm del pivote. El otro extremo era excitado mediante un disco giratorio con velocidad constante ajustada mediante un motor. El eje del péndulo está ligado a un potenciómetro por medio de una correa de goma. El potenciómetro permite medir el ángulo  $\theta$ , ya que produce una señal de voltaje proporcional al desplazamiento angular del péndulo. La misma se adquirió con una PC mediante la interfase del MPLI. Tanto el motor como el potenciómetro fueron previamente calibrados.

### 3. Resultados

Para caracterizar el movimiento del sistema sin el forzado y sin imanes se halló su frecuencia natural de oscilación. Un gráfico típico de su movimiento se muestra en la figura 4.

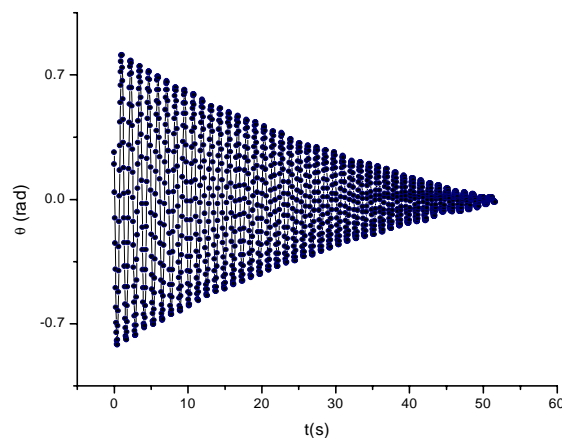
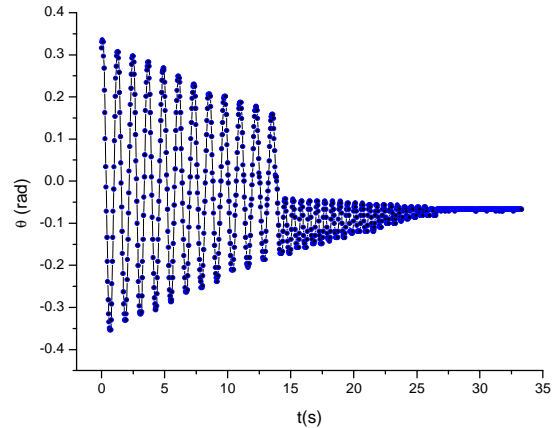


Figura 4: movimiento libre del péndulo. Su frecuencia de oscilación es de 0,83Hz.

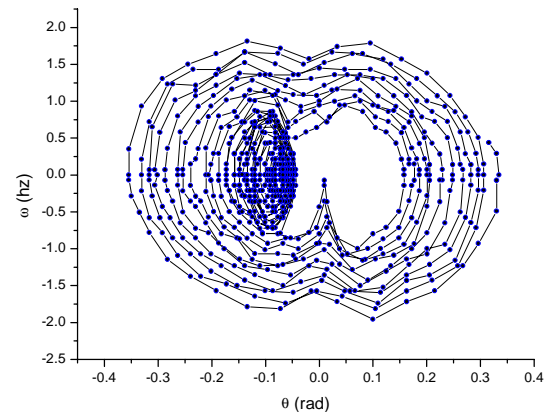
A través de la transformada de Fourier de la serie temporal, se obtuvo la frecuencia de oscilación libre del péndulo, que resultó de

0,83Hz. También se calculó la constante de amortiguamiento  $\gamma=0,04\text{s}^{-1}$ .

A continuación se introdujeron los imanes y se observó la acción del campo magnético sobre el movimiento de la barra. Las figuras 5 y 6 son series temporales y diagramas de fase típicos registrados para una distancia entre imanes de 1,6 cm.



(a)



(b)

Figura 5: (a) serie temporal y (b) diagrama de fases para  $d=1,6\text{cm}$  sin forzado.

Como se desprende de la figura 5(a) el péndulo oscila alrededor de  $\theta=0$  durante un tiempo hasta que finalmente queda atrapado en uno de los pozos de potencial, donde oscila hasta detenerse. La posición de equilibrio se encuentra aproximadamente en  $\theta=-0,07$ . Toda esta información también se puede extraer directamente del diagrama de fases de la figura 5(b).

La figura 6 corresponde a condiciones iniciales diferentes. El movimiento del péndulo es análogo al caso de la figura 5(a) salvo que ahora el péndulo queda atrapado en el otro pozo de

potencial. La posición de equilibrio se encuentra en  $\theta = 0,03$ .

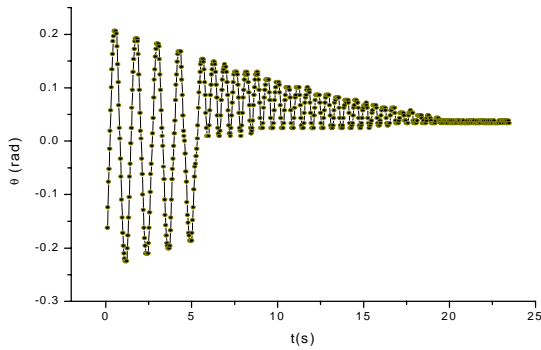


Figura 6: serie temporal para  $d=1,6\text{cm}$  sin forzado.

Se procedió luego al análisis del movimiento con excitación externa. Para una distancia  $d=2,0\text{cm}$  se varió la frecuencia del forzado. Se observaron los distintos tipos de movimiento producidos por la no linealidad del sistema.

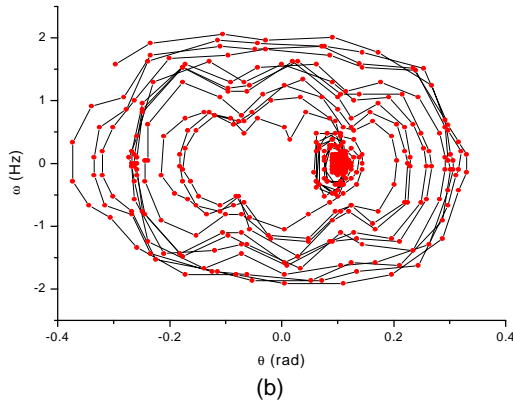
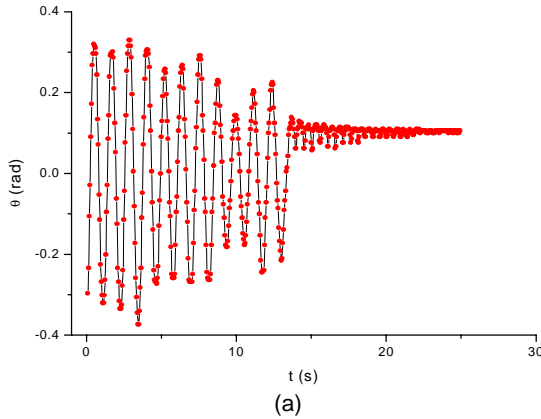
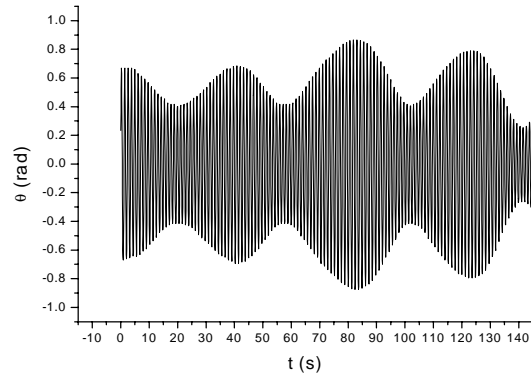
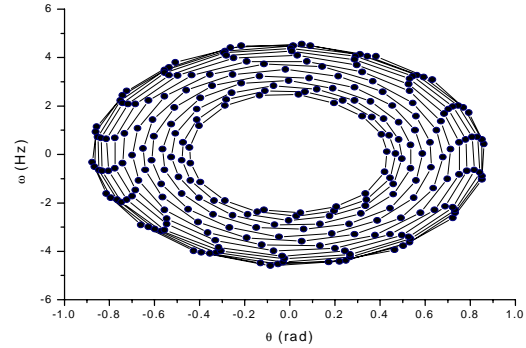


Figura 7: (a) serie temporal y (b) diagrama de fase para  $f=0,61\text{Hz}$ . Se observa un atractor en  $\theta=0,1$ .

Para todo el intervalo de frecuencias entre  $0,28\text{Hz}$  y  $0,82\text{Hz}$ , el péndulo queda siempre atrapado en uno de los dos pozos de potencial. Un caso típico se muestra en la figura 7. En  $f=0,82\text{Hz}$  se alcanza la frecuencia de oscilación libre y el sistema entra en resonancia.



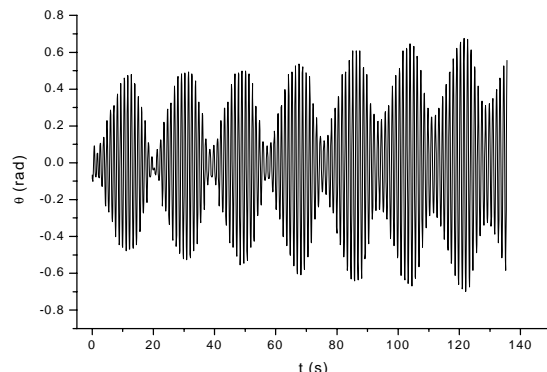
(a)



(b)

Figura 8: (a) serie temporal y (b) diagrama de fase para  $f=0,82\text{Hz}$ . Se obtiene una oscilación alrededor de  $\theta=0$  con frecuencia  $0,86\text{Hz}$ . En este caso  $\theta(0)=0,59$ .

Por primera vez el péndulo escapa a los atractores y oscila alrededor de  $\theta=0$ . Como se ve en la figuras 8(a) y (b) el movimiento es periódico. Manteniendo la frecuencia de excitación en  $0,82\text{Hz}$  se varió la amplitud inicial del péndulo. Las series temporales presentan características diferentes a las de la figura 8. En el caso de la figura 9(a) aún se obtiene una oscilación alrededor de  $\theta=0$ , aunque la frecuencia y la amplitud del batido son distintas. En el caso (b) el movimiento es totalmente diferente: primero la amplitud de la oscilación crece, pero luego el péndulo queda confinado en un atractor.



(a)

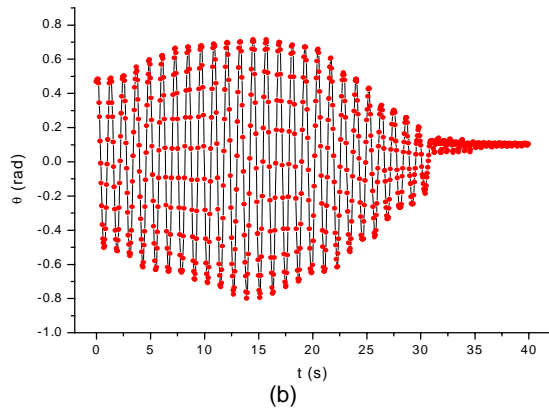


Figura 9: series temporales para  $f=0,82\text{Hz}$  y (a)  $\theta(0)=0,61$ , (b)  $\theta(0)=0,56$ .

Como vemos, en un rango estrecho  $\Delta\theta_0=0,05$  de condiciones iniciales tienen lugar tres tipos de movimientos diferentes. Es interesante el caso de la figura 9(b), donde el péndulo finaliza en uno de los atractores aún para la frecuencia de resonancia.

Aumentando la frecuencia del forzado se observan nuevas clases de movimientos.

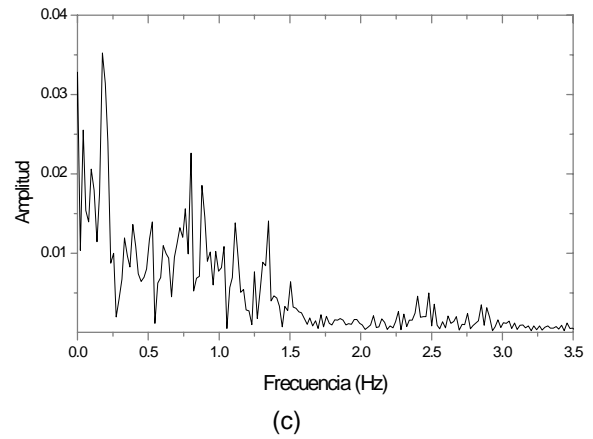
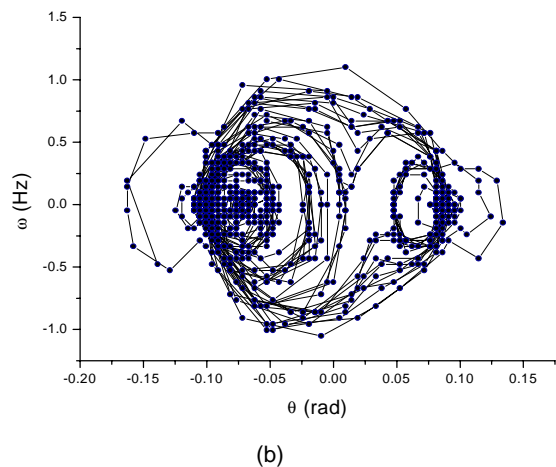
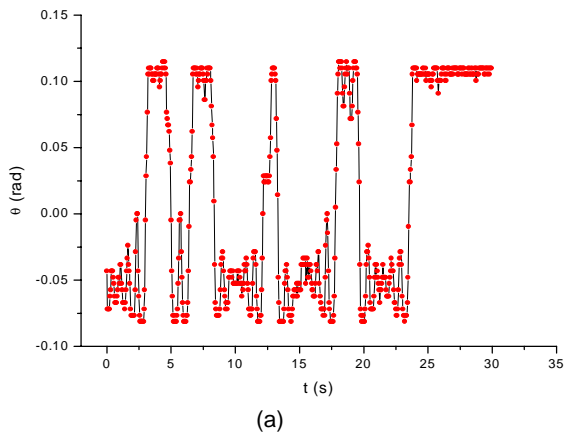
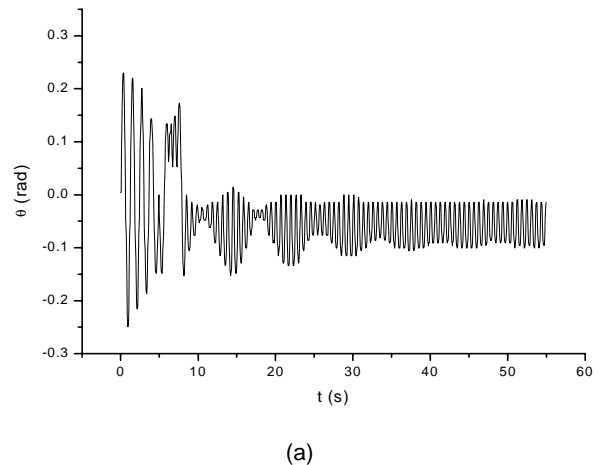


Figura 10: (a) serie temporal y (b) diagrama de fase para  $f=1,33\text{Hz}$ . El péndulo oscila entre los dos atractores. La transformada de Fourier (c) de la serie temporal no presenta ningún pico definido, una característica del movimiento caótico.

En las figuras 10(a) y (b) se observa un movimiento aleatorio entre los dos atractores, sin ninguna periodicidad definida. Tal como lo indica el espectro de Fourier (c), la respuesta del sistema a la excitación externa no es un movimiento con la misma frecuencia, sino una superposición de muchas frecuencias distintas. Esta es una de las características principales de los sistemas no lineales.

Para  $f=1,55\text{Hz}$ , el régimen estacionario del péndulo es una oscilación dentro de uno de los atractores. La respuesta vuelve a tener ahora la misma frecuencia que el forzado externo.



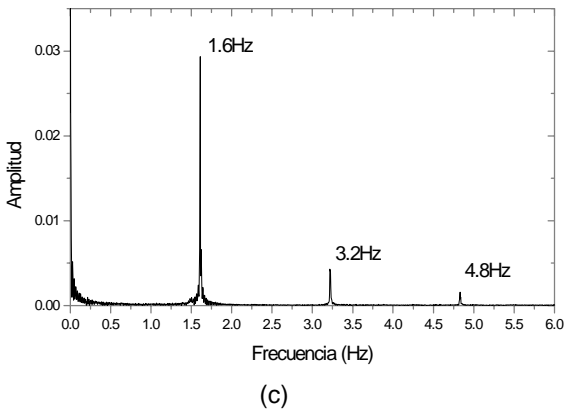
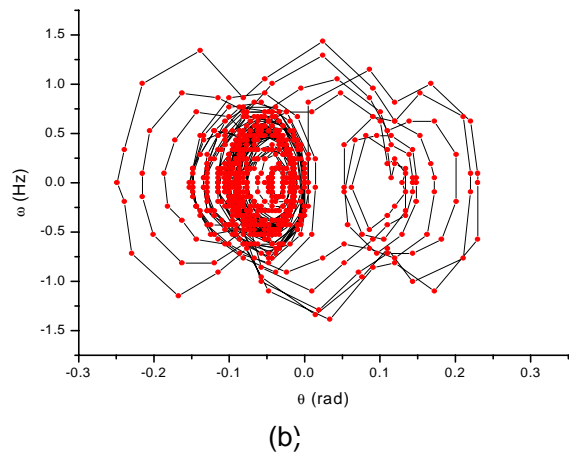


Figura 11: (a) serie temporal, (b) diagrama de fase para  $f=1,55\text{Hz}$ . El péndulo queda oscilando alrededor de  $\theta=-0,055$ . De la transformada de Fourier (c) correspondiente únicamente al movimiento dentro del atractor obtenemos la frecuencia de oscilación en el mismo, de  $1,6\text{Hz}$  e igual a la del forzado. También se encuentran presentes sus armónicos.

Para una frecuencia algo mayor, la oscilación es alrededor del otro punto de equilibrio, como se ve en la figura 12.

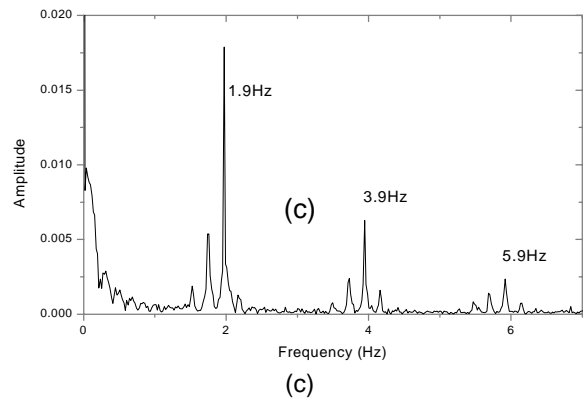
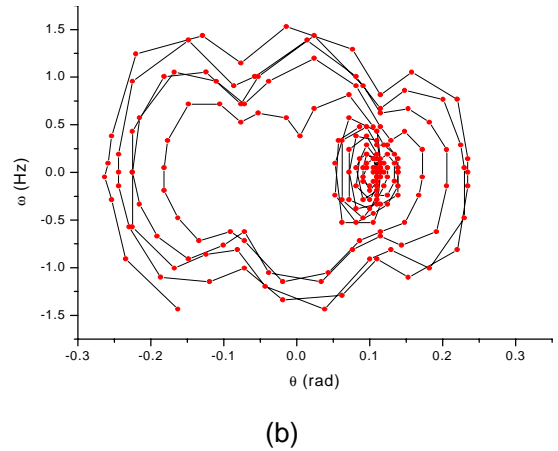
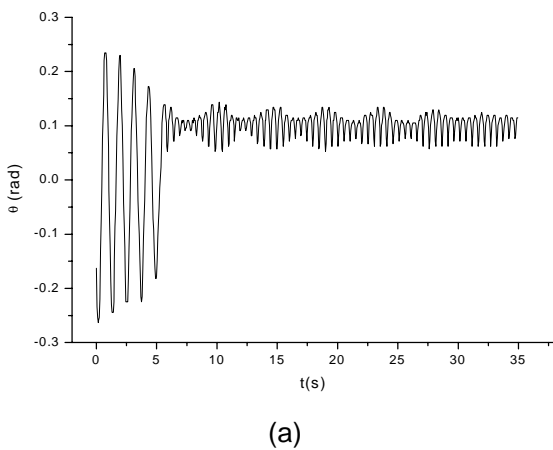


Figura 12: (a) serie temporal, (b) diagrama de fase para  $f=1,9\text{Hz}$ . El péndulo queda oscilando alrededor de la posición  $\theta=0,1$ . De la transformada de Fourier (c) correspondiente únicamente al movimiento dentro del atractor obtenemos la frecuencia de oscilación en el mismo, de  $1,9\text{Hz}$  y sus armónicos, que coincide con la del forzado.

Se procedió luego a intentar hallar experimentalmente el potencial al que se encuentra sometido el péndulo, con el objetivo de poder simular numéricamente el movimiento con un modelo alternativo y más simple que el planteado en (5).

El método utilizado se basó en calcular a partir de los datos experimentales de  $\omega(t)$  la variación temporal de la energía mecánica  $E$  del sistema sin excitación externa. En ese caso, tendríamos simplemente que

$$V(\theta) = E(t) - T \quad (6)$$

lo que nos permitiría hallar el potencial, que asumiremos dependiente únicamente de la coordenada angular  $\theta$ . Para ello se tomaron dos máximos consecutivos de la energía cinética correspondientes al mismo valor  $\theta_0$  de la coordenada angular. Estos pueden obtenerse

directamente del diagrama de fases o de la serie temporal, como se indica en la figura 13.

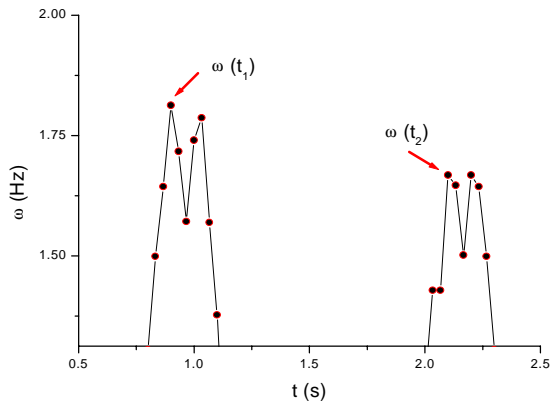


Figura 13: se indican los máximos consecutivos de la velocidad angular para un mismo valor de  $\theta$ .

Luego se propuso una forma lineal para el decaimiento de E en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  entre dichos máximos:

$$E(t) = at + b \quad t \in [t_1, t_2] \quad (7)$$

Si fijamos  $E(t_1) = T(t_1)$  y  $E(t_2) = T(t_2)$ , lo que equivale a tomar  $V(\theta_0) = 0$  en dichos puntos, podemos obtener los coeficientes  $a$  y  $b$ , resultando finalmente

$$E(t) = \left( \frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1} \right) (t - t_1) + T(t_1) \quad (8)$$

Con los datos de  $\omega$  calculamos la energía cinética  $T$ , y combinando las expresiones (7) y (8), obtuvimos la energía potencial  $V$ .

Este procedimiento se repitió para todos los pares de máximos consecutivos de la serie temporal, obteniéndose una curva de potencial aproximada por cada uno. A continuación se interpoló cada curva por un polinomio de grado 12, y finalmente se realizó un promediado entre todas ellas. Se halló así una única curva que se tomó como aproximación final al potencial  $V(\theta)$ . La figura 14 muestra el resultado de este procedimiento para una distancia  $d = 2,0 \text{ cm}$  entre imanes.

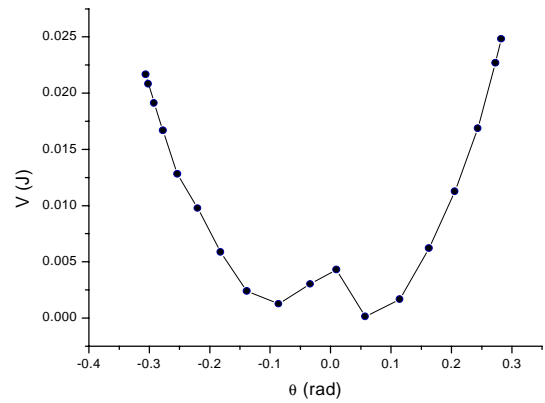
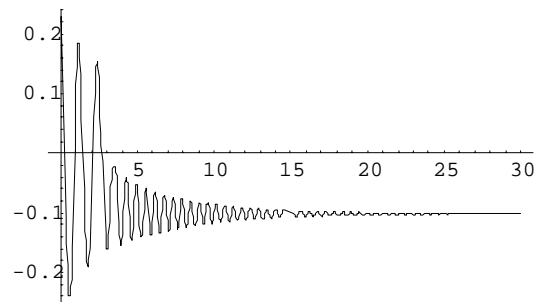


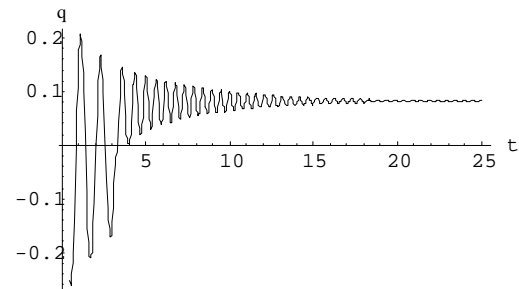
Figura 14: potencial efectivo obtenido a partir de los datos experimentales de posición y velocidad angular.

La forma de la curva obtenida coincide cualitativamente con lo esperado: la presencia de dos posiciones de equilibrio estables y de un máximo local entre ellas. También existe una asimetría respecto del origen en la ubicación de los pozos de potencial que se observa en las series temporales y diagramas de fases anteriores. Los atractores se ubican en  $\theta = 0,06$  y  $\theta = -0,09$ .

A partir de la expresión obtenida para el potencial, se halló por derivación la fuerza efectiva que actúa sobre el sistema y se simuló numéricamente su movimiento con el programa Mathematica. La figura 15 muestra los resultados obtenidos para las simulaciones sin forzado.



(a)

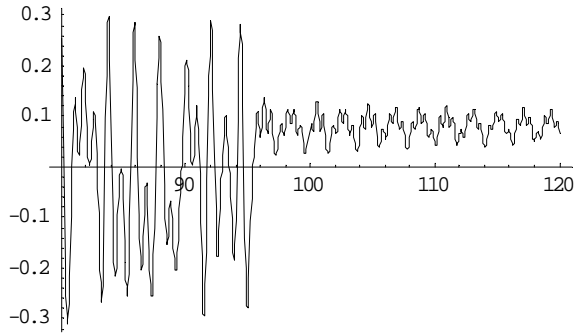


(b)

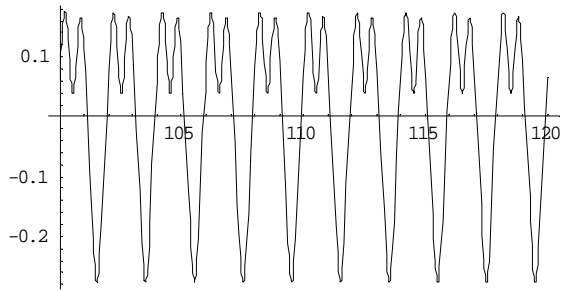
Figura 15: simulaciones numéricas con el potencial experimental sin forzado externo.

Como se esperaba, en todos los casos el péndulo oscila alrededor de la vertical, para luego quedar confinado a uno de los atractores, dependiendo de las condiciones iniciales.

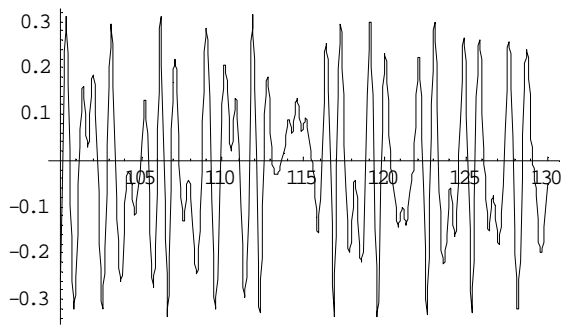
En la figura 16 se observan algunos de los tipos de movimiento predichos para el sistema con forzado.



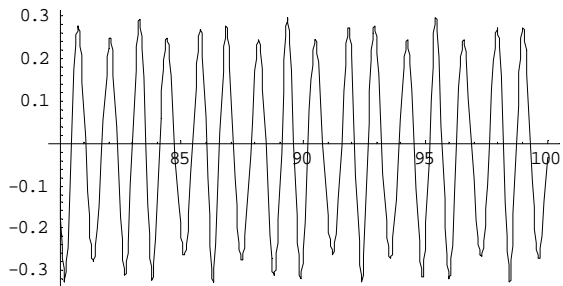
(a)



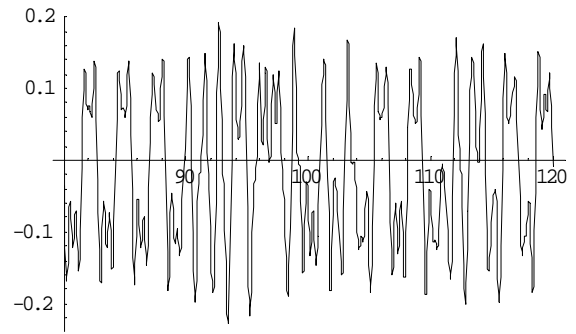
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 16: series temporales obtenidas por simulación numérica utilizando la expresión experimental del potencial. La frecuencia excitadora vale (a)0,48Hz, (b) 0,5Hz, (c) 0,7Hz, (d)0,82Hz, (e)1,8Hz.

Como vemos, para distintas frecuencia se obtienen todos los tipos de movimiento observados experimentalmente: oscilaciones en un atractor en (a), movimientos periódicos alrededor de  $\theta=0$  en (b) y (d) (esta última figura corresponde a la frecuencia de resonancia), y movimientos caóticos en (c) y (e).

El último de los fenómenos analizado fue el de histéresis mecánica. Para una distancia fija entre los dipolos, se varió gradualmente la frecuencia excitadora para observar los cambios en la amplitud de la oscilación. Fue necesario aumentar la distancia entre imanes a 4,6cm y también la amplitud del forzado, para poder obtener una oscilación alrededor de  $\theta=0$  y evitar que el péndulo quede atrapado en uno de los pozos de potencial. La curva de amplitud vs frecuencia se muestra en la figura 17.

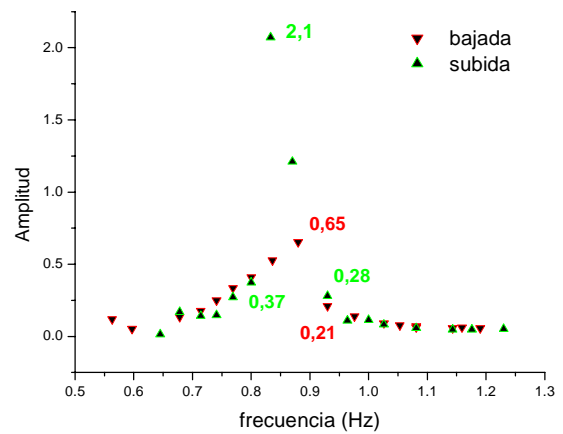


Figura 17: curva de amplitud vs frecuencia del forzado. Se observan saltos en la amplitud y que esta depende del estado anterior del sistema.

Al comenzar a aumentar la frecuencia (triángulos verdes en la figura 17), la amplitud crece gradualmente, hasta que se alcanzan los 0,83Hz correspondientes a la frecuencia de resonancia. Allí la amplitud salta desde 0,37 a 2,1. Luego se registran dos saltos más, hasta que la amplitud decae a 0,28 para  $f=0,93\text{Hz}$ . Luego sigue decreciendo lentamente. Al disminuir la frecuencia, la curva recorre el mismo camino (triángulos rojos) hasta llegar a 0,28 para  $f=0,93\text{Hz}$ , donde nuevamente salta a 0,65. Para frecuencias menores continúa decreciendo lentamente. Como vemos, existe un rango de frecuencias entre 0,83Hz y 0,93Hz, donde la oscilación es biestable: existen dos posibles amplitudes para la misma frecuencia del forzado. Además, esta amplitud depende de la historia del sistema. Esto es lo que se conoce como histéresis mecánica, fenómeno característico de muchos sistemas no lineales como por ejemplo el conocido oscilador de Duffing<sup>[3]</sup>.

#### 4. CONCLUSIONES

Se observaron distintas características de un sistema no lineal: oscilaciones periódicas y movimiento aperiódico, sensibilidad a las condiciones iniciales, histéresis mecánica y saltos en la amplitud. La forma del potencial hallado experimentalmente coincide cualitativamente con lo esperado. El acuerdo entre las simulaciones y las series temporales experimentales es bueno desde el punto de vista cualitativo. Esto resultó satisfactorio, ya que en general en un sistema caótico, es muy difícil lograr ajustes cuantitativos entre la teoría o las simulaciones y el experimento.

Una modificación importante al dispositivo experimental consistiría en mejorar el mecanismo de transmisión del movimiento de la barra al potenciómetro. En particular, el rozamiento entre las ruedas y la banda de goma le resta sensibilidad a la medición, ya que no permite registrar oscilaciones de amplitud relativamente pequeña. Una posibilidad interesante sería la utilización de un sensor de movimiento rotacional o "shaft encoder". Se podrían explorar así una variedad más amplia de movimientos.

#### 5. REFERENCIAS

[1] *Nonlinear dynamics and chaos*, S. H. Strogatz, Perseus Book Publishing, NY 2000.

[2] *Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field*, A. Siahmakoun, V. French, J. Patterson, Am. J. Phys. **65**, mayo de 1997.

[3] *From calculus to chaos, an introduction to dynamics*, David Acheson, Oxford University Press, Oxford 1998.