

Comportamiento de fluidos acelerados

Estudio experimental y modelo teórico

Alejandra Barnfather^(a), Matías Benitez^(b) y Victoria Crawley^(c)

Laboratorio de Física III (Curso 2003), Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Favaloro, Av. Belgrano 1723, (1093) C. A. de Buenos Aires

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de un fluido cuando se lo somete a una aceleración. Se propone un modelo teórico que describe la forma que adquiere la superficie del fluido acelerado debido al gradiente de presión generado por la aceleración. Luego se describen los experimentos realizados con agua y detergente. Estos líquidos se colocaron en un recipiente adecuado que podía ser acelerado de manera controlada. Se estudiaron dos casos: en el primero, se sometió al fluido a una aceleración lineal constante; en el segundo, se lo hizo rotar con velocidad angular constante alrededor de un eje de simetría del recipiente que lo contenía. Con una cámara digital se registraron las formas de las superficies en cada situación. El análisis de los datos experimentales muestra la adecuación del modelo teórico empleado.

Introducción

Cuando un fluido (líquido o gas) está en reposo ejerce una fuerza perpendicular a cualquier superficie en contacto con él, como la pared del recipiente o un cuerpo sumergido en el fluido. Si imaginamos una superficie dentro del fluido, éste ejerce fuerzas iguales y opuestas a cada lado de ella (si no, la superficie se aceleraría y el fluido no permanecería en reposo).

Consideremos una superficie pequeña de área dA centrada en un punto en el fluido. La fuerza normal ejercida por el fluido sobre cada lado es dF_{\perp} . Se define presión p en ese punto a la fuerza normal por unidad de área:^[1]

$$p = \frac{dF_{\perp}}{dA} \quad (1)$$

Si la presión es la misma en todos los puntos de la superficie plana finita de área A , entonces:

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (2)$$

donde F_{\perp} es la fuerza normal neta sobre un lado de la superficie. Además, sobre la superficie libre del fluido actúa la presión atmosférica P_0 . A nivel del mar es:

$$P_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (3)$$

Mediante consideraciones sencillas podemos deducir una expresión general entre la presión p en cualquier punto de un fluido en reposo y la altura z del mismo. Suponiendo que la densidad ρ y la aceleración debida a la gravedad g son las mismas en todo el fluido, si éste está en equilibrio cada elemento de volumen también lo está.^[1] Consideremos un elemento delgado, de altura dz , con superficies inferior y superior de área A , ubicadas a alturas z y $z + dz$ por encima de algún nivel de referencia donde $z = 0$ (Figura 1). El volumen del elemento de fluido es:

$$dV = A \cdot dz \quad (4)$$

y su masa dm y la fuerza peso dW que actúa sobre esta masa son:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dz \quad (5)$$

$$dW = dm \cdot g = \rho \cdot g \cdot A \cdot dz \quad (6)$$

Las otras fuerzas que actúan sobre este elemento son las fuerzas de presión. La presión en la superficie superior es $p+dp$ y en la inferior es p (Figura 1).

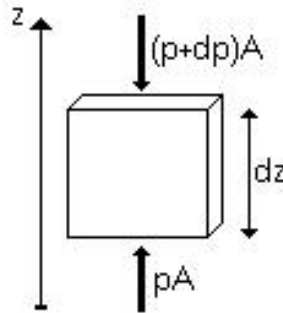


Figura 1- Representación gráfica de un diferencial de volumen del fluido en la dirección z (en esta dirección el fluido se encuentra en reposo).

Como el elemento de fluido está en equilibrio en la dirección z , usando la segunda ley de Newton obtenemos que la fuerza neta en esta dirección debe anularse:

$$\Sigma F_y = 0 \quad (7)$$

es decir,

$$p \cdot A - (p + dp) \cdot A - g \cdot dm = 0 \quad (8)$$

Usando las expresiones (4) y (6) obtenemos:

$$-dp = \rho \cdot g \cdot dz \quad (9)$$

y finalmente:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g \rightarrow p(z) = -\rho \cdot g \cdot z + p(x) \quad (10)$$

Para ajustar la presión hay que realizar el mismo razonamiento en la dirección x del sistema. Nuestro estudio se realizó con una aceleración determinada en la dirección x . Por esta razón, usando las leyes de Newton, la fuerza neta es:

$$\Sigma F_x = m \cdot a \quad (11)$$

A continuación se desarrolla el mismo razonamiento para los dos sistemas estudiados.

Caso 1:

Se somete el recipiente a una aceleración constante en la dirección creciente de x (ver Figura 2). Como consecuencia la superficie adquiere una pendiente distinta de cero.

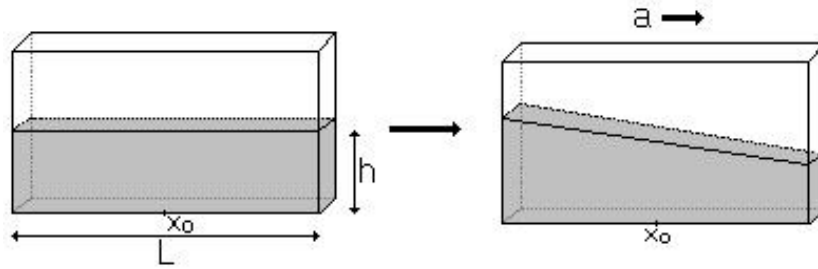


Figura 2- Izquierda: Recipiente de largo L que contiene un fluido en reposo. Derecha: Al acelerar uniformemente el recipiente se observa el cambio en la pendiente de la superficie libre del fluido.

Imaginamos un volumen pequeño de ancho dx . La presión aplicada sobre el mismo es p sobre la cara izquierda y $p+dp$ sobre la cara derecha (ver Figura 3).

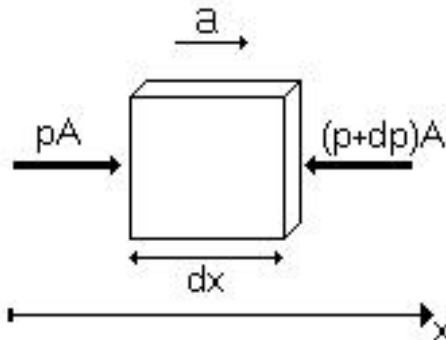


Figura 3- Representación gráfica de un elemento diferencial de volumen del fluido sometido a una aceleración constante en el sentido de x creciente.

Usando la ley de Newton (ecuación (11)) obtenemos:

$$p \cdot A - (p + dp) \cdot A = dm \cdot a \quad (12)$$

donde A es el área de la superficie y dm la masa del volumen elegido. Con las relaciones definidas por la ecuación (5):

$$p \cdot A - (p + dp) \cdot A = \rho \cdot A \cdot dx \cdot a \quad (13)$$

Finalmente obtenemos:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \cdot a \rightarrow p(x) = -\rho \cdot a \cdot x + P(z) \quad (14)$$

De las expresiones (10) y (14) obtenemos:

$$P(x, z) = -\rho \cdot a \cdot x - \rho \cdot g \cdot z + \alpha \quad (15)$$

de donde vemos que si z aumenta, p disminuye. Es decir que al subir en el fluido, la presión disminuye.

Para obtener la constante α planteamos condiciones de contorno. Sabemos que el punto medio de la superficie del fluido en $x_0 = L/2$ se mantiene constante (a la altura inicial del líquido en reposo); entonces:

$$P(x_0, h) = P_0 = -\rho \cdot a \cdot x_0 - \rho \cdot g \cdot h + \alpha \rightarrow \alpha = P_0 + \rho(a \cdot x_0 + g \cdot h) \quad (16)$$

Por otro lado, en la superficie del líquido la presión es siempre la misma y vale P_0 :

$$P_0 = -\rho \cdot a \cdot x - \rho \cdot g \cdot z + P_0 + \rho \cdot (a \cdot x_0 + g \cdot h) \quad (17)$$

$$\rho \cdot g \cdot z(x) = \rho \cdot (a \cdot x_0 + g \cdot h) - \rho \cdot a \cdot x \quad (18)$$

Despejando z , obtenemos la forma de la superficie del líquido:

$$z(x) = \frac{a \cdot x_0}{g} + h - \frac{a \cdot x}{g} \quad (19)$$

que, como vemos, depende de x . La expresión (19) obtenida se reduce a $z = h = \text{cte.}$ cuando $a = 0$ (fluido en equilibrio).

Caso 2:

Si hacemos girar el fluido con velocidad angular constante ω alrededor de su eje de simetría, estamos aplicando una aceleración radial constante dirigida hacia el eje. De esta manera se forma una superficie libre curva debido a los cambios en la presión generados por este movimiento (ver Figura 4).

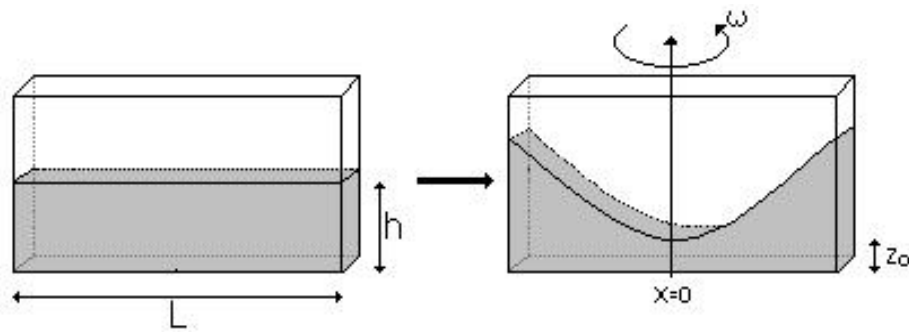


Figura 4- Izquierda: Recipiente con un fluido en reposo. Derecha: Al acelerar al recipiente radialmente se observa el cambio en la forma de la superficie libre del fluido.

La resolución de este problema es muy similar al Caso 1, teniendo en cuenta que en el presente caso, la aceleración, como es radial, apunta hacia el eje de rotación (ver Figura 5).

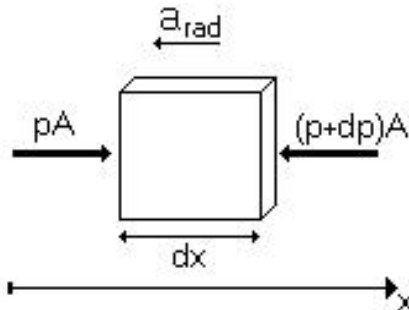


Figura 5- Representación gráfica de un elemento diferencial de volumen del fluido en rotación.

A través del uso de las leyes de Newton (ecuación (11)) resulta:

$$p \cdot A - (p + dp) \cdot A = -dm \cdot a_{rad} \quad (20)$$

Usando el mismo razonamiento con el que se determinó la presión en función de la altura obtenemos:

$$\frac{dp}{dx} = \rho \cdot \omega^2 \cdot x \rightarrow p(x) = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot x^2}{2} + p(z) \quad (21)$$

Combinando las expresiones (10) y (21) obtenemos:

$$p(x, z) = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot x^2}{2} - \rho \cdot g \cdot z + \alpha \quad (22)$$

Al igual que en el Caso 1 sabemos que sobre la superficie la presión es igual a P_0 :

$$P_0 = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot x^2}{2} - \rho \cdot g \cdot z + \alpha \rightarrow \rho \cdot g \cdot z = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot x^2}{2} + \alpha - P_0 \quad (23)$$

Para obtener la constante α planteamos condiciones de contorno, para lo que tomamos en cuenta que el volumen del fluido se mantiene constante. Como la profundidad del recipiente no varía, en este caso lo que se mantiene constante es el área (región sombreada de la Figura 4). De esta forma planteamos que el área total bajo la curva $z(x)$ debe ser igual al área inicial ($A = L \cdot h$). Para resolver las integrales efectuamos los siguientes cambios de variables:

$$a = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \quad (24)$$

$$\gamma = \frac{\alpha - P_0}{\rho \cdot g} \quad (25)$$

Planteando las integrales y utilizando la ecuación (22):

$$L \cdot h = \int_0^L (a \cdot x^2 + \gamma) \cdot dx \quad (26)$$

$$L \cdot h = \left(a \cdot \frac{x^3}{3} + \gamma \cdot x \right) \Big|_0^L \rightarrow L \cdot h = \frac{a \cdot L^3}{3} + \gamma \cdot L \quad (27)$$

de donde:

$$\gamma = h - \frac{a \cdot L^2}{3} \quad (28)$$

Igualando las expresiones (25) y (28) obtenemos:

$$\alpha = h \cdot \rho \cdot g - \frac{\omega^2 \cdot L^2 \cdot \rho}{6} + P_0 \quad (29)$$

y finalmente obtenemos la forma de la superficie del líquido $z(x)$ introduciendo (29) en (23):

$$z(x) = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \left(x^2 - \frac{L^2}{3} \right) + h \quad (30)$$

Esta expresión predice que la superficie del fluido que gira con velocidad angular constante tomará la forma de una parábola.

Del análisis de las expresiones (19) y (30) podemos observar que, en el marco del modelo propuesto, la forma que adopta la superficie del fluido acelerado no depende de la densidad del mismo.

El objetivo del presente trabajo es estudiar experimentalmente el comportamiento de diferentes fluidos acelerados en las situaciones descritas, y ver si las expectativas del modelo desarrollado se ajustan a los datos experimentales.

Método experimental

Realizamos los experimentos con agua y detergente. Para contener a los líquidos utilizamos una caja de plástico transparente, de largo $L = 22,4$ cm, alto $h_0 = 13$ cm y ancho $b = 2,5$ cm.

Caso 1:

Para la primera parte del proyecto se montó el recipiente en un carrito que podía moverse con poca fricción sobre una superficie suave. El recipiente fue acelerado con una aceleración constante cuando era tirado por un hilo del que colgaban algunas pesas. La aceleración fue determinada mediante un fotointerruptor vinculado a la polea por donde pasaba el hilo.^[2] La Figura 6 muestra una fotografía del dispositivo utilizado.

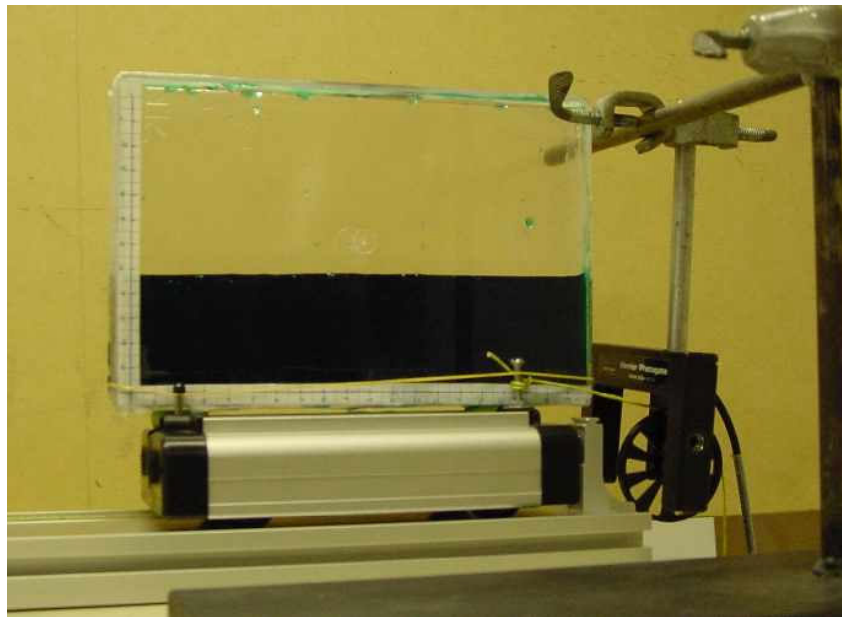


Figura 6- Dispositivo utilizado en el Caso 1. El recipiente que contiene el líquido puede acelerarse mediante la aplicación de una fuerza que transmite un hilo del que cuelgan pesas. El hilo pasa por una polea vinculada a un fotointerruptor. El fotointerruptor mide tiempos a partir de los cuales se determina la aceleración (Ref. [2]).

Para la toma de mediciones se utilizó una cámara digital y se obtuvieron fotos mientras el cuerpo se encontraba en movimiento. En este caso el único fluido que se utilizó fue agua con colorante (usamos tinta verde). La altura inicial del líquido fue $h = 4,1$ cm.

Caso 2:

Para la segunda parte del proyecto utilizamos una plataforma giratoria sobre la cual colocamos el recipiente con el líquido. Se tuvo cuidado de que el recipiente girara alrededor de su eje de simetría. Para esto, se cuidó de que este eje coincidiera con el eje de giro de la plataforma. La plataforma estaba conectada a un motor de corriente continua por medio de una correa de transmisión. Para la toma de mediciones se filmó el proceso con una cámara digital. Luego se procedió a dividir la filmación cuadro por cuadro con el programa PictureGear 5.0 y elegimos aquellos cuadros en los que el recipiente se observaba de frente. Simultáneamente, con un fotointerruptor se midió la velocidad angular instantánea de la plataforma. A continuación se muestra el dispositivo implementado (Figura 7).

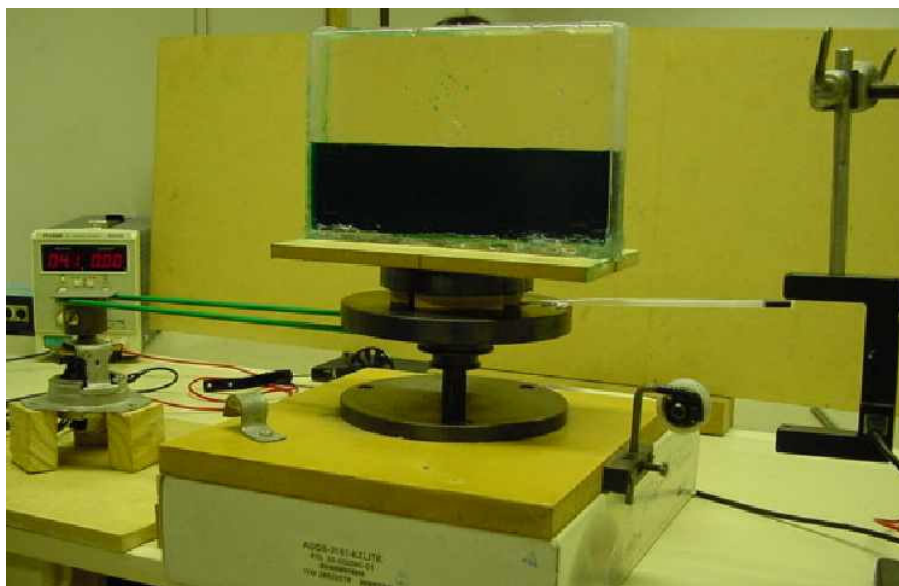


Figura 7- Dispositivo experimental utilizado en el Caso 2.

Para este caso se utilizó agua coloreada (Caso 2.1) y detergente (Caso 2.2), para ver si el modelo teórico propuesto se cumple para fluidos de distinta densidad.

Para determinar la densidad del detergente pesamos un volumen conocido y obtuvimos la densidad de acuerdo a la definición:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (31)$$

El valor de densidad obtenido para el detergente fue:

$$\rho_{\text{det}} = [985 \pm 1] \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (32)$$

Para el agua adoptamos su densidad igual a:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (33)$$

En ambos casos, la altura inicial del líquido fue $h = 5,3$ cm.

Resultados

A partir de las imágenes grabadas definimos las formas de las superficies de los fluidos acelerados. Para esto, marcamos puntos (x, z) a lo largo de la superficie usando un programa de edición de imágenes. Luego anotamos la ubicación de cada punto en píxeles, los cuales fueron transformados a unidades de longitud a través de una escala. Esta escala fue definida a partir de las dimensiones del recipiente. Una vez obtenida la coordenada de cada punto, los datos se graficaron y analizaron con el programa Excel ©Microsoft de edición de planillas de cálculo.

Caso 1: Fluido con aceleración lineal

A continuación se presenta el gráfico de distancia x en función de tiempo t para determinar la aceleración del recipiente montado sobre el carrito. Para un movimiento uniformemente acelerado: $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$. En la Figura 8 se muestra $x(t)$ y el correspondiente ajuste, de donde se deduce que la aceleración constante fue:

$$a = [0,777 \pm 0,002] \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

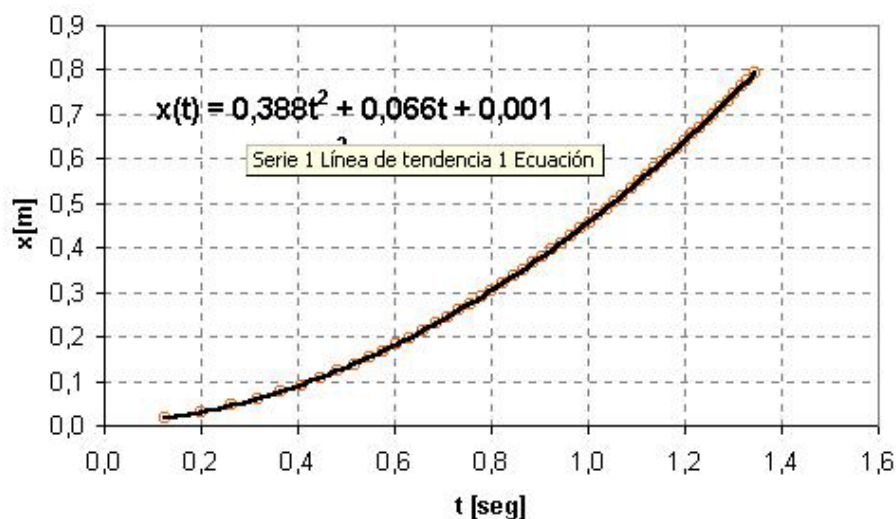


Figura 8- Representación gráfica de distancia (x) en función del tiempo (t) para obtener la aceleración del fluido.

En la Figura 9 se presenta la fotografía utilizada para tomar los datos del Caso 1. En ella se han dibujado varios de los datos experimentales. En la Figura 10 se muestran las curvas teórica (ecuación 19) y experimental. Como se puede observar, las curvas son casi idénticas. La aceleración utilizada es la obtenida por medio del fotointerruptor y el ajuste no tiene parámetros libres. Se tomó $g = 9,81$ m/s^2 .

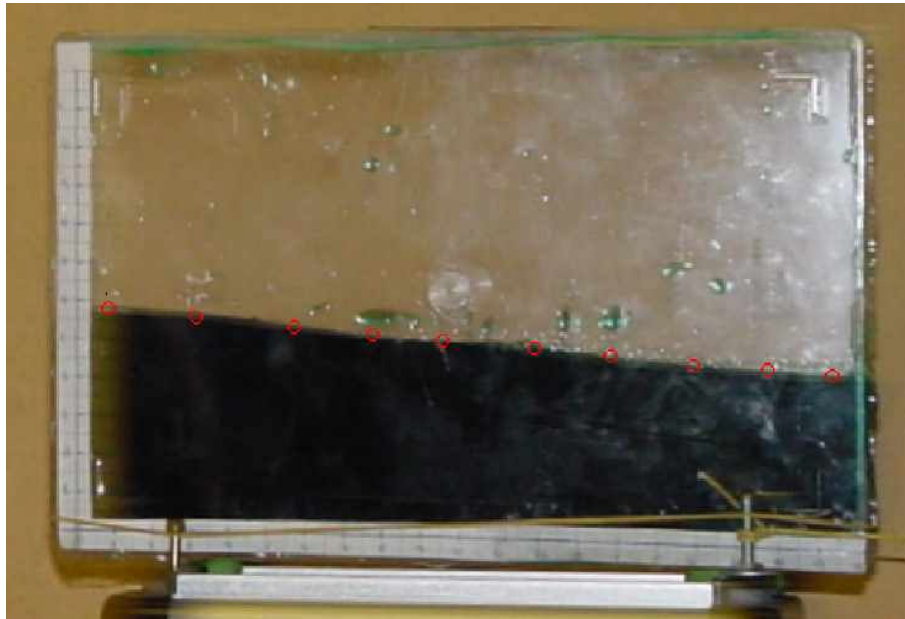


Figura 9- Imagen usada para definir la superficie del agua para el CASO 1.

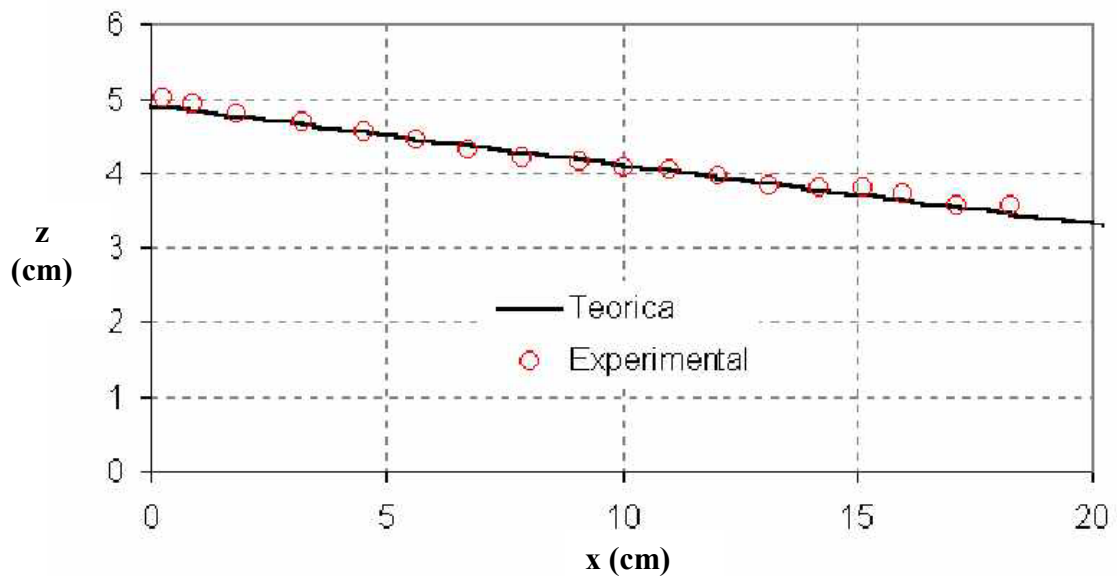


Figura 10- Representación gráfica de $z(x)$ para el Caso 1 (corresponde a la imagen de la Figura 9). Se compara la observación experimental con la predicción del modelo teórico [expresión (19)].

Caso 2: Fluido en rotación

En las figuras 11 y 13 se presentan las fotografías utilizadas para tomar los datos del Caso 2. En las fotografías se han dibujado varios de los datos experimentales. En las figuras 12 y 14 se muestran las curvas teórica (ecuación 30) y experimental, obtenidas para cada caso. En estos casos, la velocidad angular utilizada para graficar la expresión teoría fue la velocidad angular instantánea obtenida a través del fotointerruptor al mismo instante en que se

adquiriría la imagen (ver comentarios en Observaciones). Como se puede observar en la Figura 12 el modelo teórico se ajusta a la curva experimental con muy buena precisión.

Caso 2.1: Agua

La velocidad angular instantánea en el momento de adquirir la imagen fue:

$$\omega = [12,33 \pm 0,02] \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

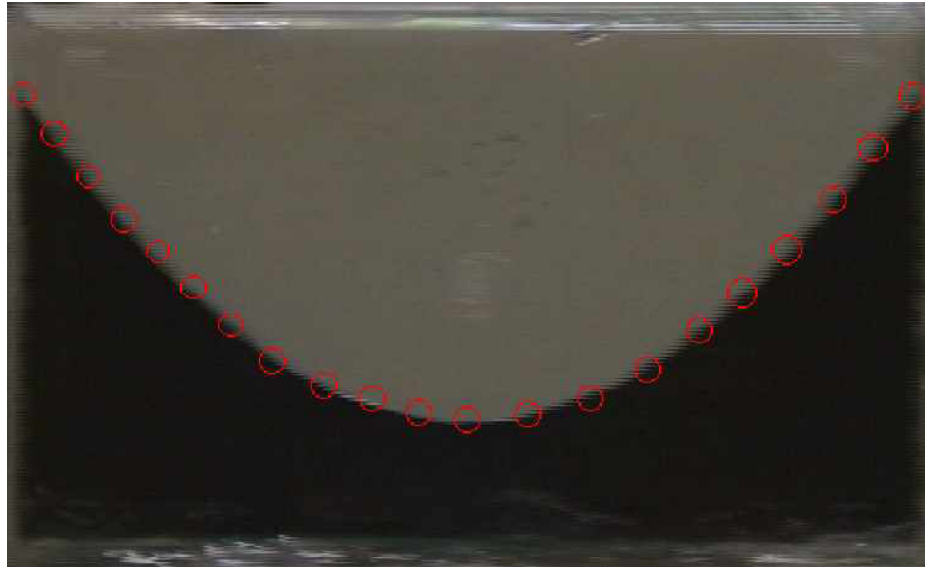


Figura 11- Imagen adquirida con la cámara digital. Se observa la superficie libre que forma el agua coloreada cuando gira con una velocidad angular de 14,03 rad/s.

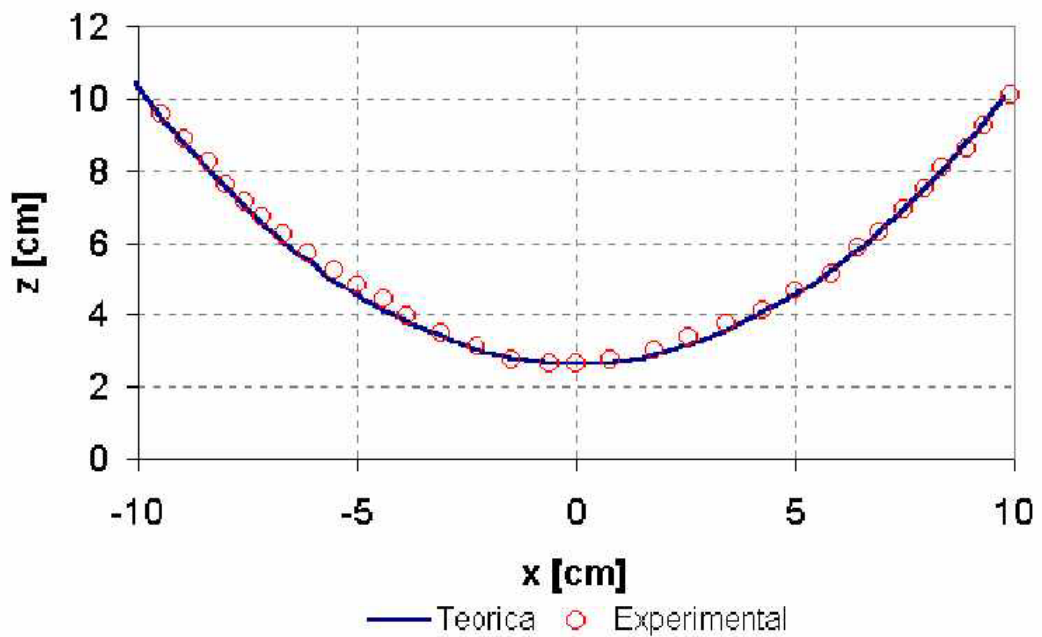


Figura 12- Representación gráfica de $z(x)$ para el Caso 2.1 (corresponde a la imagen de la Figura 11).

Caso 2.2: Detergente

En este caso la velocidad angular instantánea fue:

$$\omega = [14,03 \pm 0,02] \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

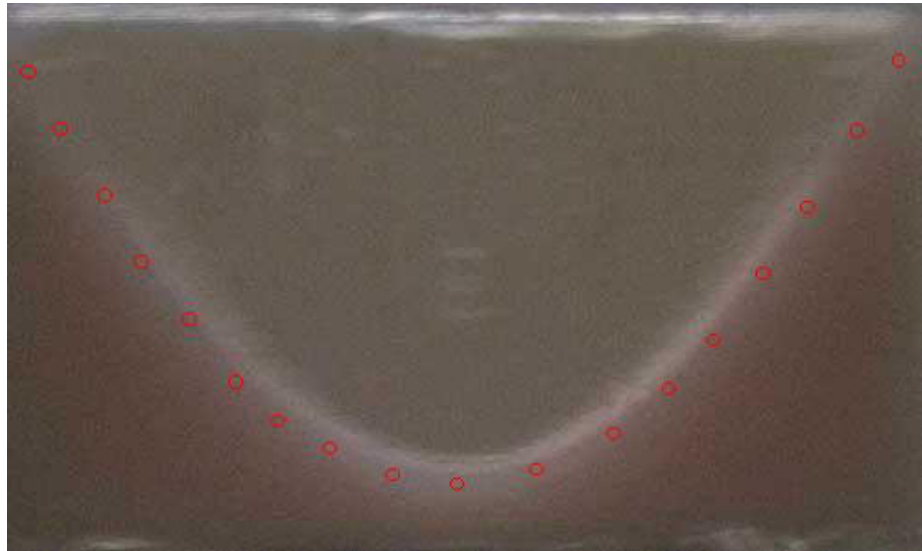


Figura 13- Imagen adquirida con la cámara digital. Se muestra la forma que adopta la superficie del detergente que gira con una velocidad angular de 14,03 rad/s. La franja blancuzca es una capa fina de espuma.

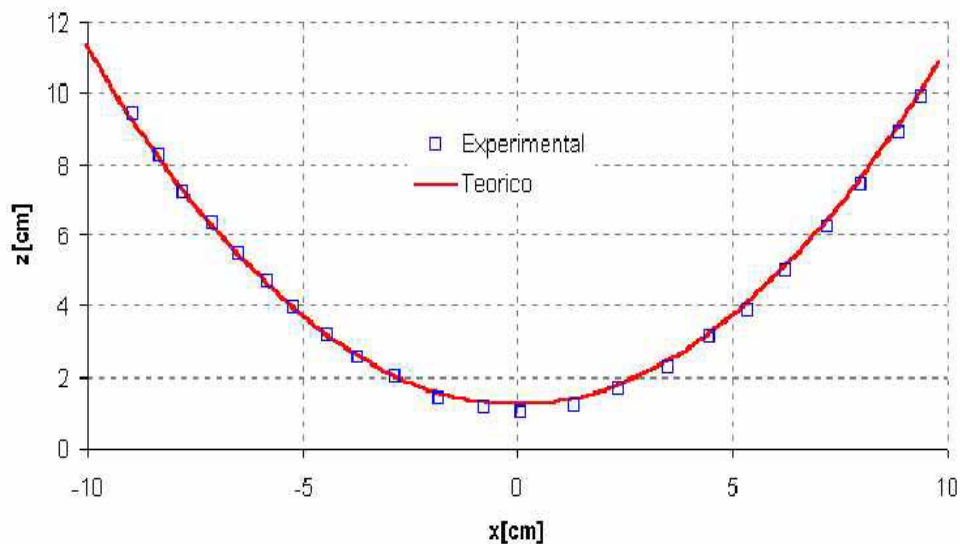


Figura 14- Representación gráfica de $z(x)$. Los datos corresponden al Caso 2.2 y fueron tomados de la imagen de la Figura 13. Se comparan los datos (símbolos) con la predicción del modelo teórico (línea).

Como se puede observar en los gráficos, las curvas teóricas son representativas de los datos obtenidos experimentalmente. Por lo tanto, los datos están descritos por el modelo

teórico planteado. Además se observa que la forma de la superficie del fluido es independiente de la densidad del mismo.

Observaciones

Un problema que encontramos durante los experimentos de rotación fue la dificultad para mantener una velocidad angular constante. Esto se debió a limitaciones del motor de corriente continua usado. Por esta razón se trabajó con la velocidad instantánea correspondiente al cuadro seleccionado de la película. Esto nos ocasionó varios problemas para elegir la fotografía adecuada ya que la parábola varía con la velocidad. De haber conseguido rotaciones con velocidad constante, cualquier parábola hubiese servido.

Conclusiones

Se puede observar que al aplicar una aceleración constante a lo largo de una dirección se forma una superficie del fluido con pendiente distinta de cero; en nuestro caso, como la aceleración tiene el mismo sentido en que crece el eje x , la recta formada es de pendiente negativa. Por otro lado, al rotar el fluido alrededor de su eje con una velocidad angular constante, sobre la superficie del fluido se observa una parábola de concavidad positiva. Estas superficies se forman debido al gradiente de presión que se genera en el fluido.

Como se puede observar en los gráficos, el modelo teórico propuesto describe los datos experimentales, tanto para el agua como para el detergente, a pesar de que estos líquidos tienen distintas densidades. Por lo tanto, se corroboró que la forma que adquiere la superficie del fluido es independiente de la densidad del mismo, al menos en el (estrecho) rango de densidad investigado.

Sería interesante estudiar el comportamiento de fluidos de diferentes viscosidades en presencia de una aceleración, ya que el modelo teórico no tiene en cuenta las fuerzas viscosas.

Referencias

- (a) reina_capanga@hotmail.com
- (b) matiasbenitez@fibertel.com.ar
- (c) kikicrawley@hotmail.com

1. F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, *Física universitaria*, vol. 1, 9^a ed., Addison-Wesley Longman, México, 1999.
2. Esta técnica de medición puede verse en: S. Gil y E. Rodríguez, *Física re-Creativa: Experimentos de Física usando nuevas tecnologías*, Prentice Hall, Buenos Aires, 2001.