

# Apantallamiento electromagnético

María Soledad Nakwacki y Mónica Agüero  
sole@agro.uba.ar monagu07@yahoo.com.ar

Laboratorio5- Marzo de 2002  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

## Resumen

En el siguiente trabajo se presenta un modelo para el estudio del apantallamiento de campos magnéticos alternos en un caño de aluminio de espesor  $d \ll \delta$  (skin depth) y *radio*  $D \ll \lambda$  inmerso en una región de campo magnético variable, de longitud de onda  $\lambda$ , generado por un solenoide. Los resultados se comparan con las predicciones de un modelo propuesto por Fahy, Kittel y Louie<sup>[1]</sup>. En base al mismo se calcula la conductividad del material  $\sigma = (2,76 \pm 0,36) \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ , contrastando este resultado con el valor tabulado de  $2,92 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ , en unidades gaussianas.

## 1. Introducción

El carácter de los campos electromagnéticos variables en medios materiales depende fundamentalmente de la naturaleza de estos medios y del orden de magnitud de la frecuencia de los campos.

En medios conductores las ondas que se propagan transversalmente (E y B) muestran una disminución en su amplitud con la distancia, es decir, una onda electromagnética entrando en un conductor sufre una reducción de su amplitud inicial en  $1/e=0.369$  a la distancia de<sup>[5]</sup>

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma}} \Big|_{\text{Gaussiana}} = \frac{2}{\sqrt{2\mu\omega\sigma}} \Big|_{\text{MKS}} \quad (1)$$

expresado en unidades gaussianas y MKS, aquí  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del metal,  $\omega$  es la frecuencia angular del campo alterno ( $=2\pi f$ ) y  $c$  es la velocidad de la luz. Ésta distancia  $\delta$  es llamada "skin depth" o "profundidad de penetración", distancia hasta la cual penetra el campo, y resulta una buena aproximación para buenos conductores.

Para el problema de interés en este trabajo, consistente en dos bobinas cilíndricas concéntricas y coaxiales, siendo la más externa el primario y la interna el secundario, ver Fig. 2. Entre las dos bobinas se intercala un cilindro metálico de radio  $D$  y espesor  $d$ , la conductividad del mismo es  $\sigma$ . El modelo que vamos a utilizar y someter a prueba experimental, tiene valides la longitud de onda  $\lambda$  del campo electromagnético, es tal que<sup>[1]</sup>:  $\lambda \gg D \gg d$ . En el límite  $\delta \ll D$  el campo decae exponencialmente desde afuera de la espira, con una longitud característica dada por (1).

En el siguiente trabajo se considera fenómenos que tienen lugar en conductores tridimensionales (cilindros huecos) situados en campos magnéticos variables.

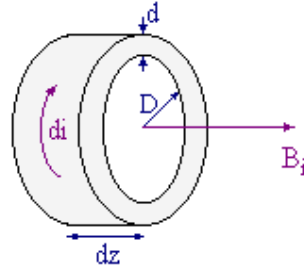
Este efecto que se desprende de las leyes de Faraday y Ampere fue estudiado en trabajos anteriores por otros autores<sup>[1,2,3]</sup>. Según el modelo propuesto por Fahy, Kittel y Louie<sup>[1]</sup>, el interior de un cilindro coaxial de radio interno  $D$  y espesor  $d$  colocado en el campo magnético de un largo solenoide es apantallado si  $d \gg d_0$ , donde

$$d_0 = \frac{\delta^2}{D} \quad (2)$$

Por lo tanto el campo puede ser apantallado cuando el espesor del cilindro es mucho mayor que el skin depth.

Se asume que justo fuera del conductor solo existe la componente normal, al cilindro, del campo eléctrico E y una componente tangencial del campo magnético B (igual que el caso de un conductor perfecto), despreciando de esta manera los efectos de borde.

Para modelar el efecto de apantallamiento magnético se calcula el campo magnético  $B_i$  en el interior de la sección circular que verifica  $B_i=B_0+B_s$  donde  $B_0$  es el campo externo aplicado al cilindro y  $B_s$  es el campo apantallado.



**Figura 1:** Sección diferencial del cilindro.

El corte transversal del cilindro que se muestra en la Figura 1 se encuentra inmerso en un campo magnético variable  $B_0$  de frecuencia  $\omega$  coaxial al mismo, uniformemente distribuido en el espacio. La dependencia temporal de los campos es  $e^{-i\omega t}$ .

En el cilindro se induce una corriente por unidad de longitud del cilindro. La corriente  $di$  en el corte de la Figura 1, a partir de la Ley de Ohm, está dada por la relación

$$di = \frac{V}{\delta R} = \frac{V}{\frac{1}{\sigma} \frac{2\pi \cdot D}{d \cdot dz}} = \frac{V \cdot \sigma \cdot d \cdot dz}{2\pi \cdot D} \quad (3)$$

donde  $\delta R$  es la resistencia y  $V$  es la fuerza electromotriz inducida en el corte diferencial del cilindro.  $\sigma$  representa la conductividad eléctrica del material.

Se define la corriente por unidad de longitud (del cilindro) en la dirección azimutal ( $J_\phi$ ) como:

$$j_\phi = \frac{di}{dz} = \frac{V \cdot \sigma \cdot d}{2\pi \cdot D} \quad (4)$$

Aplicando la Ley de inducción de Faraday se tiene:

$$V = \frac{1}{c} \cdot \left( \frac{-d\phi}{dt} \right) = \frac{i\omega \cdot \pi \cdot D^2 \cdot B_i}{c} \quad (5)$$

La fuerza electromotriz depende solamente de la velocidad de variación del flujo magnético  $\phi$  del campo  $B_i$ .

Consecuentemente la corriente por unidad de longitud satisface:

$$j_\phi = \frac{V \cdot \sigma \cdot d}{2\pi \cdot D} = i \frac{\omega \cdot \sigma \cdot D \cdot d}{2 \cdot c} B_i \quad (6)$$

Se considera que el campo magnético producido por la corriente inducida en el cilindro es similar al campo de un solenoide de longitud infinita. Sin embargo, esta aproximación es aceptable en el centro del cilindro, por consiguiente al efectuarse las mediciones debe tenerse en cuenta esta condición.

Bajo esta hipótesis y aplicando la Ley de Ampere se llega:

$$B_s = \frac{4\pi}{c} j_\phi = i \frac{2\pi \cdot \sigma \cdot \omega \cdot d \cdot D}{c^2} B_i = i \frac{d \cdot D}{\delta^2} B_i \quad (7)$$

El campo resultante en el interior del cilindro  $B_i$  será la suma de ambos campos: el aplicado  $B_0$  y el inducido por el cilindro  $B_s$ , o sea:

$$B_o = B_i - B_s = B_i \cdot \left(1 - i \frac{D \cdot d}{\delta^2}\right) \quad (8)$$

Consecuentemente, la relación de los campos magnéticos puede expresarse como sigue:

$$\frac{B_i}{B_o} = \frac{1}{1 - i \cdot \left(D \cdot d / \delta^2\right)} \quad (9)$$

Además se requiere<sup>[1]</sup> que  $\delta \gg d$ .  
En módulo será:

$$\left| \frac{B_i}{B_o} \right| = \frac{1}{\left[1 + \left(D \cdot d / \delta^2\right)^2\right]^{1/2}} \quad (10)$$

Si  $D \cdot d \gg \delta^2$ , entonces la ecuación (10) puede aproximarse por:

$$\left| \frac{B_i}{B_o} \right| = \frac{\delta^2}{D \cdot d} = \frac{c^2}{D \cdot d \cdot 2\pi \cdot \omega \cdot \sigma} \quad (11)$$

El logaritmo de la relación de los campos está dado por:

$$\ln \left| \frac{B_i}{B_o} \right| = \ln \left( \frac{c^2}{D \cdot d \cdot 2\pi \cdot \omega \cdot \sigma} \right) = \ln \left( \frac{c^2}{D \cdot d \cdot 2\pi \cdot \sigma} \right) - \ln(\omega) \quad (12)$$

Como se considera el campo magnético de un solenoide infinitamente largo se tendrá

$$\frac{B_i}{B_o} = \frac{V_{con\_Al}}{V_{sin\_Al}} \quad (13)$$

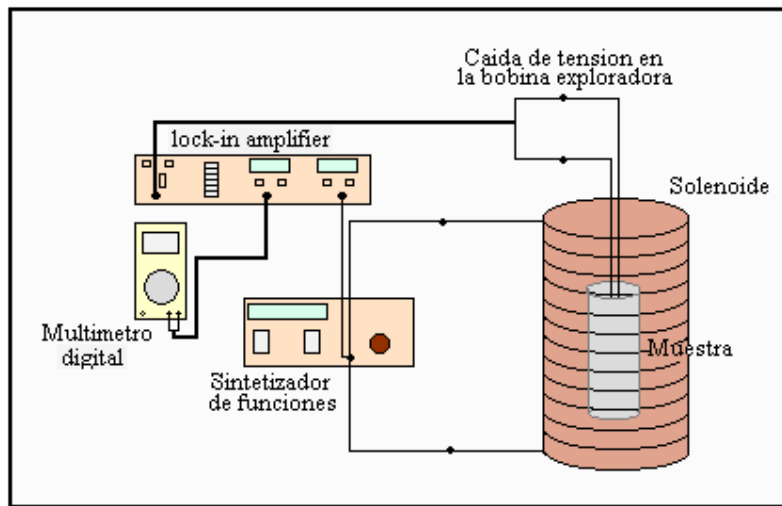
aquí,  $V_{con\_Al}$  es la tensión máxima (o de pico) en el secundario cuando el blindaje de  $Al$  esta presente y aquí,  $V_{sin\_Al}$  es la tensión máxima (o de pico) en el secundario cuando el blindaje de  $Al$  NO esta presente. De (13) se llega a la expresión:

$$\ln \left| \frac{B_i}{B_o} \right| = \ln \left| \frac{V_{con\_Al}}{V_{sin\_Al}} \right| = \ln \left( \frac{c^2}{D \cdot d \cdot 2\pi \cdot \sigma} \right) - \ln(\omega) \quad (14)$$

con la que se trabajará para modelar el efecto de apantallamiento magnético.

## Desarrollo experimental y resultados

El dispositivo experimental que se empleó en la práctica se detalla en la Figura 2. El campo magnético variable exterior, que induce la corriente en el caño, se generó alimentado con el sintetizador de funciones un solenoide de radio  $2.5 \pm 0.1$  cm. y 21.2 cm. de longitud. La frecuencia de la señal que genera el campo se varió de 1 a 100 KHz, en pasos de 2 KHz. Para poder estudiar el apantallamiento y de allí deducir la conductividad del material se calculó el campo magnético externo aplicado ( $B_o$ ) y el campo magnético en el interior de la sección circular del caño ( $B_i$ ). Para ello se midió la caída de tensión en la bobina exploradora colocada en la región de campo magnético sin la muestra. Este resultado se lo asocia con la variación de flujo magnético a través de la misma obteniéndose de aquí  $B_o$ . R representa el radio de la bobina. El campo magnético  $B_i$  se obtuvo de manera análoga midiendo la caída la tensión en la bobina exploradora colocada en el interior del caño. En ambas mediciones se tuvo sumo cuidado de colocar la bobina exploradora no solo en el eje sino en el centro del caño o del solenoide, según corresponda, para garantizar que el campo magnético que se deduce se aproxime al campo de un solenoide infinitamente largo.



**Figura 2:** Esquema del dispositivo experimental

Para disminuir el ruido y amplificar la señal de salida se empleó un lock-in amplifier. Finalmente la señal se leía con un multímetro digital.

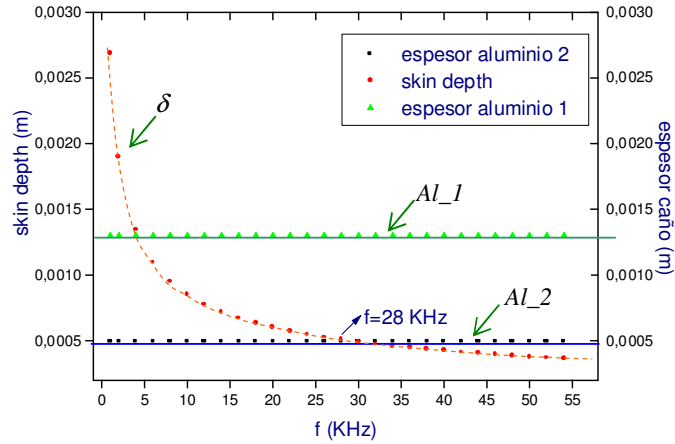
Se analizaron tres muestras:

Material	D (radio cm.)	d (espesor cm.)
Cobre	$1.280 \pm 0.002$	$0.140 \pm 0.005$
Aluminio1	$0.91 \pm 0.02$	$0.130 \pm 0.005$
Aluminio2	$1.00 \pm 0.02$	$0.050 \pm 0.005$

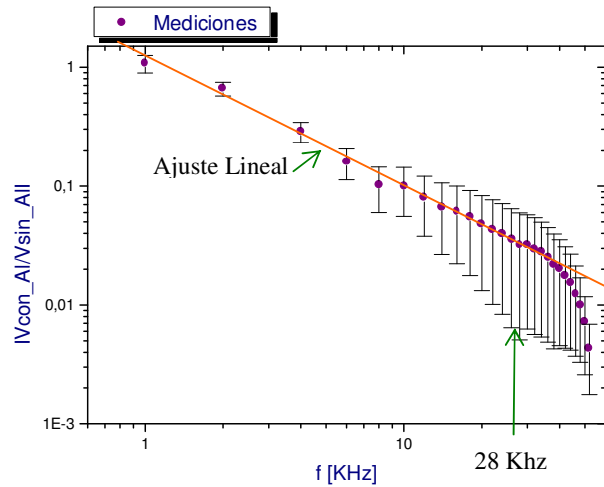
Sin embargo, como se muestra en la Figura 3, la muestra aluminio 2 es la única que cumple con la condición  $\delta \gg d$ . Las frecuencias que satisfacen esta condición son menores a 28 KHz. Para frecuencias cercanas y superiores a los 28 KHz no se puede proponer como modelo la ecuación (14), en este caso será necesario trabajar con la solución exacta.

Para el caño de 0.13 cm de espesor (aluminio1) se observa que la condición  $\delta \gg d$  no se satisface dentro del rango de frecuencias estudiado.

A continuación, en la Figura 4, se presenta para la muestra aluminio 2 un gráfico log-log de la relación de las tensiones en la bobina exploradora con el cilindro de aluminio ( $V_{con\_Al}$ ) y sin el mismo ( $V_{sin\_Al}$ ), en función de la frecuencia del campo magnético para el rango de 1 a 52 KHz.



**Figura 3:** Se grafica el skin depth y el espesor de los caños de aluminio en función de la frecuencia.



**Figura 4:** Gráfico log-log de la relación de las tensiones versus la frecuencia en el rango de 1 a 52 KHz.

En la Figura4 se observa una desviación que no se contempla en la ecuación (14), esto es previsible porque allí el skin depth es comparable o mayor al espesor del caño, por lo tanto la hipótesis  $\delta \gg d$  no se satisface.

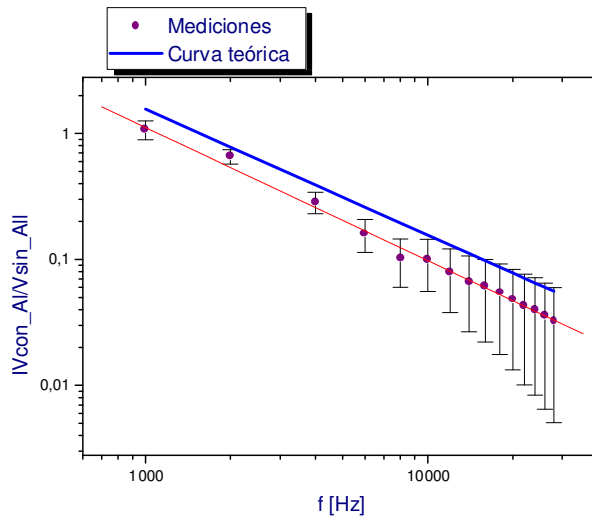
Esto corresponde a frecuencias mayores a los 28 KHz.

En la Figura 5 se presenta el mismo gráfico de la Figura 4 en el rango de frecuencias de 1 a 28 KHz. Además se incluye en el mismo la curva teórica, línea azul, que se obtiene a partir de la ecuación (14), donde el valor de la conductividad eléctrica para el aluminio<sup>[2]</sup> es de  $2,92 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ , equivalente a  $\rho = 3,42 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ .

Se realiza un ajuste lineal de los datos, curva roja, obteniendo como resultado:

A	B	C
$3.218 \pm 0.118$	$-1.057 \pm 0.028$	$-0.995$

Donde A es la ordenada al origen, B es la pendiente y C es el factor de correlación.



**Figura 5:** Gráfico log-log de la relación de las tensiones versus la frecuencia en el rango de 1 a 28 KHz.

De la ordenada al origen se tiene:

$$A = \log\left(\frac{c^2}{4\pi^2 \cdot \sigma \cdot D \cdot d}\right)$$

Del cual se deduce el valor de la conductividad eléctrica para el aluminio  $\sigma = (2,76 \pm 0,36) \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ , equivalente a  $\rho = (3,6 \pm 0,5) \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . El error se calcula por propagación de errores.

## Conclusión

Esta experiencia muestra que bajo las hipótesis mencionadas en la introducción el efecto de apantallamiento magnético en un cilindro hueco conductor puede ser descrito con un simple modelo que depende de la frecuencia de oscilación del campo magnético externo  $\omega$  y del radio, espesor y conductividad eléctrica del cilindro.

La conductividad eléctrica depende del material en cuestión y de su estado físico. Para el aluminio el valor aceptado<sup>[2]</sup> es de  $2,92 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$  (en unidades gaussianas, equivalente a  $\rho = 3,42 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ) a temperatura ambiente. Nuestro cálculo difiere del tabulado en un 6 %, esta discrepancia no se debe tanto a impurezas que puedan existir en el material sino más bien a errores en las mediciones como ruido. También pudo influir el hecho de que el campo magnético variable no era uniforme en el caño dado que el radio del solenoide no era mucho más grande que el de la muestra. Por lo tanto las tensiones medidas resultan ser un promedio en esa región. La uniformidad que se requiere en el modelo teórico puede lograrse empleando un solenoide de radio mucho mayor que el radio del cilindro colocado en el eje de simetría del solenoide. De esta manera también se muestra la importancia de cumplir con todas las hipótesis para que el modelo ajuste bien los datos, dejando en claro que este modelo propuesto solo sirve para determinada región de frecuencias y cierto rango de espesores, el fenómeno de apantallamiento ocurre también para otras frecuencias y espesores, pero este modelo es incapaz de ajustar y se deberá proponer otra solución a modo de poder estudiar el fenómeno bajo diferentes condiciones.

## Referencias

- [1]. S. Fahy, C. Kittel, and S.G. Louie, "Electromagnetic screening by metals", Am. J. Phys. **56** 989-992 (1988).
- [2]. P. Rochon and N. Gauthier, "Strong shielding due to an electromagnetically thin metal sheet", Am. J. Phys. **58** 276-277 (1990).
- [3]. C Kittel, S. Fahy and S. G. Louie, Phys. Rev. B **37**, 642 (1988).
- [4]. Landau y Lifshitz, "Electrodinámica de los medios continuos" vol 8 capVII, Editorial Reverté S.A. (1975)
- [5]. John David Jackson, "Classical electrodynamics", cap 5 pag 298, John Wiley & Sons, 1975.

