

# Estudio del blindaje magnético y de las corrientes de Foucault

SEBASTIÁN J. FERRARA\* y HERNÁN D. REISIN\*\*  
*Laboratorio 5 - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*  
*Universidad de Buenos Aires*  
(Diciembre 2004)

El blindaje magnético consiste en el apantallamiento de un campo magnético luego de atravesar un material conductor. En este trabajo se estudió un modelo de apantallamiento de campo magnético mediante la utilización de cilindros conductores huecos inmersos en una región de campo magnético uniforme. En particular, se estudió la dependencia de este efecto con el espesor del cilindro y la frecuencia del campo oscilante, obteniendo un valor de la conductividad del material ( $\sigma = (7,2 \pm 0,4) \times 10^{16} 1/s$ ). Complementariamente, se midió mediante el método denominado “a cuatro puntas” la conductividad de los cilindros conductores huecos para verificar alternativamente el modelo propuesto para el apantallamiento (como resultado se obtuvo  $\sigma = (7,4 \pm 1,2) \times 10^{16} 1/s$ ). Los resultados no presentan diferencias significativas indicando la validez del modelo propuesto. Finalmente, se modelaron y midieron las diferencias de potencial sobre circuitos circulares de corriente producidos por un dipolo magnético enfrentado a una placa conductora plana. La desviación de los resultados es discutida en términos de la aproximación dipolar y del método iterativo típico de la aproximación cuasiestacionaria.

## I. INTRODUCCIÓN

Los experimentos de Cavendish y las investigaciones de Coulomb sobre configuraciones estáticas de carga a fines del siglo XVIII marcaron el inicio del análisis cuantitativo de la electrodinámica clásica. A partir de dichos estudios originales se dedujo que el conjunto completo de manifestaciones “electrostáticas” podía ser íntegramente descrito por la fuerza de Coulomb y el principio de superposición. Paralelamente, desde el punto de vista histórico, los efectos de las fuerzas magnéticas eran ya conocidos desde tiempos tan remotos como las fuerzas electrostáticas, pero demoraron en ser expresadas formalmente hasta el primer cuarto del siglo XIX, principalmente por la ausencia de monopolos magnéticos [1]. Para ésta época, Oersted, Biot y Savart y Ampère establecieron las relaciones matemáticas entre corrientes eléctricas y la inducción magnética. En ambos casos, las dos teorías tenían en común que los fenómenos electro- y magnetostáticos podían ser tratados en forma totalmente independiente. Por ejemplo, la física completa asociada con las fuerzas de Coulomb puede ser expresada en términos del campo eléctrico ( $\vec{E} = \vec{F}/q$ ) como:  $\nabla \times \vec{E} = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ , donde  $\rho$  es la distribución espacial de carga, y las leyes fundamentales entre las corrientes ( $\vec{J}$ ) y los campos de inducción ( $\vec{B}$ ) por:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . Claramente, ambos campos están únicamente vinculados por el hecho de que las corrientes que producen el campo de inducción magnético son básicamente cargas eléctricas en movimiento estacionario. Sin embargo, afortunadamente, el univer-

so de fenómenos eléctricos y magnéticos es mucho más rico en variedad que el resultante de distribuciones estacionarias de carga o de corriente. La naturaleza casi independiente de los campos electro- y magnetostáticos desaparece cuando consideramos problemas (más reales) dependientes del tiempo: campos magnéticos variables en el tiempo dan lugar a campos eléctricos y viceversa.

Este trabajo está dedicado al estudio de un aspecto particular de esta íntima interdependencia de los campos electromagnéticos en presencia de un medio conductor: *el blindaje magnético*. Este efecto consiste en el apantallamiento de un campo de inducción luego de atravesar una delgada superficie conductora, debido principalmente a la acción *conjunta* de dos fenómenos simultáneos:

- Atenuación exponencial de los campos.
- Corrientes parásitas (de Foucault) que ocurren en el seno del conductor [12].

Brevemente estos dos eventos pueden ser obtenidos a partir de las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones (1), (2), (3) y (4) que describen la forma de los campos una vez que la configuración de fuentes (cargas y corrientes) ha sido definida. Para observaciones macroscópicas en las cuales el comportamiento detallado de los campos electromagnéticos dentro de un material es en muchos casos irrelevante, las ecuaciones de Maxwell para los campos y las corrientes promedio (en un medio isótropo y homogéneo) son:

---

\* Correo electrónico: shaf@fullzero.com.ar

\*\* Correo electrónico: hreisin@hotmail.com

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

donde  $\epsilon$  y  $\mu$  son la constante dieléctrica y la permitividad magnética que provienen del promediado espacial de los campos dentro del medio. De acuerdo a la ley de inducción de Faraday (ecuación (3)) y utilizando la ley de Ohm ( $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ ) se ve que la variación temporal del campo de inducción provoca una circulación de corrientes en virtud del teorema de Stokes. Estas corrientes inducidas (denominadas parásitas o de Foucault) actúan a su vez como fuente de nuevos campos magnéticos que tienden (nótese el signo menos en la ley de Faraday) a generar un autoflujo que se opone a la variación del flujo externo concatenado (ley de Lenz), apantallando consecuentemente al campo original. Por otro lado, la atenuación adicional observada a medida que la onda penetra en el material puede verse en detalle considerando campos armónicos del tipo:  $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t}$ . Para esta dependencia funcional, tomando la ley de Maxwell (ecuación (2)), la ley de Ohm, y el rotor de la ley de Faraday, el campo eléctrico (y el magnético) cumplen la siguiente ecuación de Laplace [1]:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{c^2} \left( 1 + \frac{i4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)$$

donde  $\vec{A}$  denota indistintamente  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$ . En particular, para un buen conductor caracterizado por ( $1 \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}$ ) el número de onda  $k$  toma el valor:

$$k \approx \pm (1 + i) \frac{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}{c}$$

y por lo tanto dentro del medio los campos muestran una disminución exponencial en su amplitud con la distancia a la interfase del mismo, definida por:  $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{i(x/\delta - \omega t)}$ , donde  $\delta$  es la longitud característica del efecto piel o "skin depth" (en unidades gaussianas):

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad (5)$$

(En este trabajo se toma  $\mu = 1$ , lo que es válido para la mayoría de los metales a frecuencias menores que

las microondas  $\omega \sim 10^{10} Hz$ ). Nótese entonces que la magnitud de los campos variables depende fundamentalmente de la naturaleza del medio (a través de la conductividad  $\sigma$ ) y de la frecuencia del campo ( $\omega$ ). Puntualmente, en este trabajo, se explotó dicha dependencia, estudiando el blindaje producido por una aleación de bronce en función del espesor de las placas conductoras (pantallas) y de la frecuencia de los campos incidentes. Para ello se utilizó una pantalla cilíndrica inmersa en un campo magnético uniforme. Además se utilizó una placa plana de material aislante provista convenientemente de pistas circulares concéntricas metálicas, ubicada frente a un dipolo magnético de magnitud oscilante con el objeto de medir las corrientes de Foucault sobre las pistas. Para cada uno de estos dos arreglos experimentales se presenta en la sección II un modelo teórico acorde para cada geometría basado en los mismos principios físicos mencionados previamente. En la sección siguiente se presenta la descripción de los dispositivos experimentales y las calibraciones utilizadas. Finalmente, en la sección IV se contrastan los resultados contra las predicciones calculadas, y se discute las desviaciones respecto de los modelos.

## II. MODELO TEÓRICO

Como se mencionó anteriormente, este informe está enfocado al estudio del blindaje magnético a través del análisis de dos arreglos experimentales esencialmente diferentes. Ahora, se presentan los desarrollos del modelo particular para cada uno de ellos en forma discriminada.

### A. Geometría cilíndrica

Se considera un cascarón cilíndrico metálico de longitud infinita, un solenoide también de longitud infinita, y el siguiente arreglo: el cilindro inmerso dentro del solenoide (bobina primaria) y dentro del cilindro una segunda bobina (secundaria), todos coaxiales. Así dispuestos, es anticipable que el campo registrado por la bobina secundaria sea menor en magnitud que la generada por el solenoide (bobina primaria), debido claro está, al blindaje producido por el cilindro conductor. El objetivo de esta sección es deducir las amplitudes de los campos medidos por la bobina secundaria en función de los parámetros del campo exterior y del cilindro.

Por la simetría del problema el campo magnético sólo tiene componente según  $\hat{z}$  (ver figura 1), y el campo eléctrico sólo tiene componente según  $\hat{\phi}$ , además los campos sólo pueden depender de  $\rho$  (en coordenadas cilíndricas). Se propone además que los campos son proporcionales a  $\exp(-i\omega t)$ . Se definen los campos de la siguiente manera:  $B_c, E_c$  son los campos en el interior del material,  $B_0, E_0$  son los campos en el exterior del material y por fuera

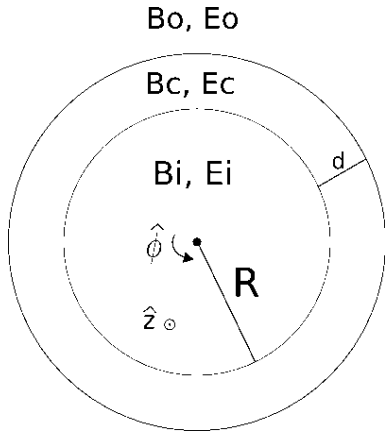


Figura 1: Corte transversal del cilindro y esquema de los campos presentes.  $B_c, E_c$  son los campos de inducción magnética y eléctrica en el interior del material.  $B_o, E_o$  son los campos incidentes del “vacío” (consideraremos al aire como un medio no polarizable, ni magnetizable) generados por una fuente externa.  $B_i, E_i$  son los campos apantallados por el conductor en el “vacío”.  $R$  y  $d$  son el radio interior y el espesor del cilindro respectivamente.

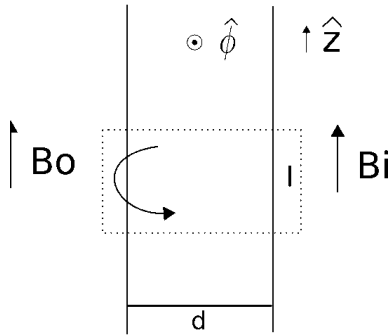


Figura 2: Corte longitudinal del cilindro metálico utilizado. La línea punteada indica un circuito virtual para la aplicación de la ley de Ampere. La nomenclatura restante es similar a la utilizada en la figura 1.

del conductor ( $B_o$  es el campo generado por el solenoide),  $B_i, E_i$  son los campos en el exterior del material y por dentro del cilindro,  $R$  y  $d$  son el radio y el espesor del cilindro respectivamente (ver figura 1).

Para la deducción se utilizará la aproximación cuasiestacionaria, válida siempre que la longitud de onda  $\lambda$  de la onda electromagnética sea mucho mayor que cualquier longitud característica de los elementos empleados (bobinas, blindajes, etc.). En nuestro caso, las longitudes de onda utilizadas fueron siempre mayores que  $750m$  (se trabajó siempre por debajo de los  $400KHz$ ) y la longitud de los elementos utilizados fue siempre del orden de unos pocos centímetros.

Hay otras dos importantes aproximaciones más utili-

zadas en este modelo, la primera que  $\delta \gg d$  y la otra es que  $R \gg d$ , de esta forma los campos en el interior del material conductor pueden considerarse uniformes. Utilizando la ley de Faraday (ecuación (3)) se obtiene la siguiente relación entre los campos:

$$2\pi R E_c = \frac{i\omega}{c} \pi R^2 B_i \quad (6)$$

Si ahora se utiliza la relación constitutiva entre el campo eléctrico y la densidad de corriente en el medio conductor:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , donde  $\sigma$  es la conductividad del material, se obtiene la siguiente ecuación para  $J$ :

$$J = \frac{i\omega\sigma}{2c} B_i R \quad (7)$$

Para calcular el campo interno  $B_i$  en función de los demás parámetros del problema se utiliza la ley de Ampere (pues en la aproximación cuasiestacionaria es posible despreciar la corriente de desplazamiento de la ley de Maxwell, ecuación (2)) mediante el circuito de líneas punteadas de la figura 2, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$(B_i - B_o)l = l \frac{4\pi}{c} \frac{i\omega\sigma}{2c} B_i R d \quad (8)$$

Simplificando se llega a la siguiente expresión para el campo magnético en el interior del cilindro metálico:

$$B_i = \frac{B_o}{1 - i \frac{Rd}{\delta^2}} \quad (9)$$

En módulo se obtiene:

$$\left| \frac{B_i}{B_o} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{Rd}{\delta^2} \right)^2}} \quad (10)$$

Este resultado es similar al encontrado bajo otras consideraciones físicas en [2–6]. Sin embargo, se invita al lector interesado en un desarrollo formal más detallado a la deducción presentada en el Apéndice.

## B. Geometría plana

En este caso, se considera un bobinado primario (que se modeló por una espira) frente a un plano conductor considerado infinito dispuestos como se puede apreciar en la figura 3. A *primer orden*, la componente radial del campo generado por la espira es el siguiente:

$$B_r = 2m \frac{\cos(\theta)}{r^3} \exp(-i\omega t) \quad (11)$$

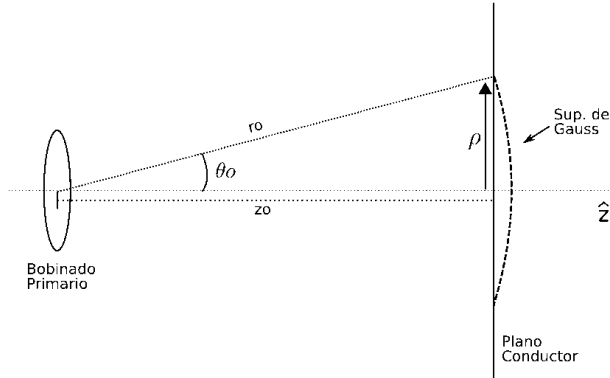


Figura 3: Diagrama esquemático de la orientación de la fuente del campo y de la pantalla plana. Las magnitudes indicadas se refieren a las variables utilizadas en la deducción del modelo para este arreglo.

donde  $m$  es el momento magnético de la espira ( $m = \frac{I\pi a^2}{c}$ ). Se ve entonces que a diferencia de la deducción anterior, el campo que es apantallado por una pantalla plana no es uniforme. De aquí en adelante no se coloca explícitamente el factor exponencial dependiente del tiempo, pero será considerado en los razonamientos.

Considerando la superficie de Gauss definida por el cono de ángulo sólido indicado en la figura 3 se puede calcular el flujo del campo a través de la misma, dando por resultado:

$$\Phi = 2\pi \int_0^{\theta_0} 2m \frac{\cos(\theta)}{r_0^3} r_0^2 \sin(\theta) d\theta = \frac{2\pi m}{r_0} \sin^2(\theta_0) \quad (12)$$

Dado que las líneas de flujo de  $\vec{B}$  son curvas cerradas, y por lo tanto el flujo calculado para la superficie de Gauss coincide con el flujo *sobre* la placa plana que es el que se desea conocer. Por la ley de Faraday se puede calcular la fem ( $\epsilon$ ) y el campo eléctrico en el contorno de la superficie de Gauss considerada:

$$\epsilon = \frac{i\omega}{c} \frac{2\pi m}{r_0} \sin^2(\theta_0) \quad (13)$$

$$E = \frac{i\omega m}{cr_0^3} \rho \quad (14)$$

Si ahora se emplean las siguientes relaciones geométricas:  $r_0^2 = \rho^2 + z_0^2$  y  $\sin(\theta_0) = \frac{\rho}{r_0}$ , además de la relación entre el campo eléctrico y la densidad de corriente dentro del material ( $\vec{E} = \sigma \vec{J}$ ), se obtienen las expresiones finales utilizadas posteriormente en este trabajo:

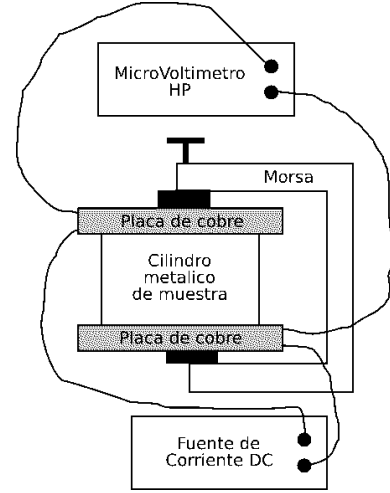


Figura 4: Arreglo experimental utilizado para medir la conductividad de los cilindros metálicos empleados (ver texto).

$$\epsilon = \frac{i2\pi\omega m}{c} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (15)$$

$$J = \frac{i\omega m \sigma}{c} \frac{\rho}{(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (16)$$

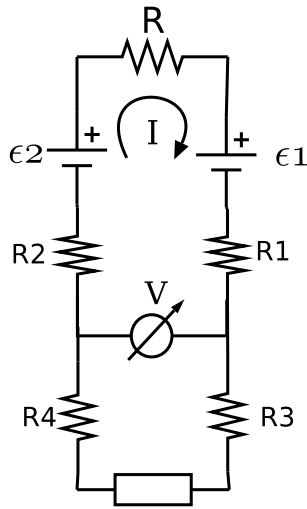
### III. ARREGLO EXPERIMENTAL

Dada la simplicidad esencial de los dispositivos utilizados, éstos serán descriptos sintéticamente en la siguiente sección junto con los resultados.

#### A. Medición de la conductividad de las pantallas cilíndricas huecas en forma directa

Para medir la conductividad de los cilindros metálicos utilizados para el blindaje cilíndrico en forma directa, se utilizó la técnica denominada "a cuatro puntas". Para ello, se colocó el cilindro entre dos placas anchas (de cobre) y se las comprimió con una morsa para afirmar los elementos y aumentar el contacto entre las placas y el cilindro (ver figura 4). Se perforaron dos agujeros contiguos en cada placa y se soldó un cable de cobre en cada uno de ellos, para conectar un microvoltímetro y una fuente de corriente continua.

En la figura 5 se puede observar el circuito esquemáticamente equivalente al montaje experimental (figura 4). Donde  $R$  es la resistencia del cilindro que se quiere medir,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  son las resistencias de los cables, y finalmente  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son las caídas de tensión en los contactos entre los cables y las placas de cobre



Fuente de Corriente

Figura 5: Esquema del circuito utilizado para la medición de la conductividad de los cilindros metálicos empleados.

(que son desconocidas y serán eliminadas por inversión de corriente). Utilizando la ley de Ohm y las leyes de Kirchoff se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\epsilon_1 + I(R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + \epsilon_2 = V \quad (17)$$

Si ahora se invierte el sentido de la corriente (en la práctica sencillamente invirtiendo la conexión de los cables que alimentan el circuito con la fuente de corriente) manteniendo la intensidad de la misma constante, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\epsilon_1 + I(R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - \epsilon_2 = -\tilde{V} \quad (18)$$

Sumando las dos últimas ecuaciones se obtiene finalmente:

$$2I(R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = V - \tilde{V} \quad (19)$$

Obteniéndose una dependencia lineal entre la corriente y el voltaje. Para cada cilindro, se varió la cantidad de la corriente entregada por la fuente y se midieron los valores de la diferencia de potencial  $V$  (para la corriente directa) y  $\tilde{V}$  (para la corriente reversa) correspondientes. Como era de esperarse la relación entre  $(V - \tilde{V})$  en función de  $2I$  es lineal (ver figura 6), como lo indica la regresión lineal por cuadrados mínimos. Nótese que la pendiente de la recta es el valor:  $R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ . Para cada cilindro se realizó el mismo gráfico y el ajuste correspondiente.

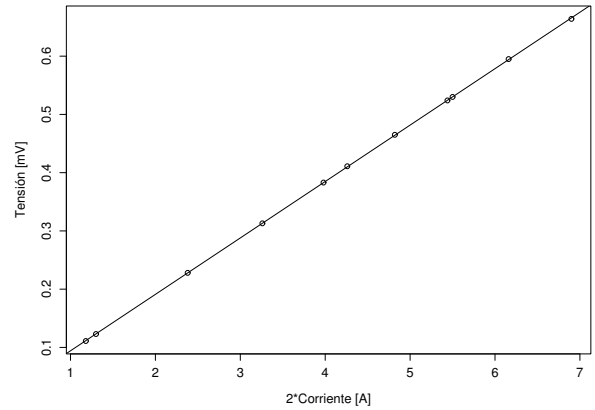


Figura 6: Gráfico de la tensión (suma de  $V$  y  $\tilde{V}$ ) versus el doble de la corriente para uno de los cilindros empleados junto con el correspondiente ajuste por el método de cuadrados mínimos ( $r^2 = 0,999$ ) (no se aprecian las barras de error porque son muy pequeñas).

## B. Construcción de la plaqueta plana con pistas conductoras

Para poder medir la magnitud local del campo eléctrico sobre la placa plana en forma directa se diseñó y construyó un arreglo de 20 pistas conductoras como se indica en la figura 7A. Cada pista consiste en un anillo de cobre de 3mm de ancho separada de las pistas vecinas por un anillo no-conductor de 1mm de ancho. La continuidad de cada anillo se truncó eliminando el material conductor a lo largo de un radio vector de 1 mm de espesor. Así, las veinte pistas forman un conjunto de "herraduras" concéntricas.

Para generar este patrón sobre una placa virgen de baquelita y cobre se utilizó un procedimiento habitual en el diseño de plaquetas. Brevemente, el croquis se realizó usando el software QCad para GNU/Linux (similar al Autocad para Windows) respetando una escala 1:1 y se imprimió sobre una hoja fotosensible (Editorial Técnica Plaquetodo, Argentina) utilizando una impresora de tonner (ver figura 7A). La clave de este proceso es que aquellos puntos de la plaqueta virgen sobre los que se transfiere el dibujo queden enmascarados por una capa aislante de la corrosión. Para ello, el papel fue fijado con su cara impresa sobre la placa (previamente lijada para eliminar óxidos superficiales) y se pasó una plancha caliente presionando con firmeza para producir la transferencia térmica del dibujo. Luego, se sumergió la plaqueta en un recipiente con agua caliente y se retiró el papel humedecido. Las irregularidades debidas a una mala transferencia del patrón sobre la plaqueta fueron corregidas con un marcador indeleble (compare las figu-

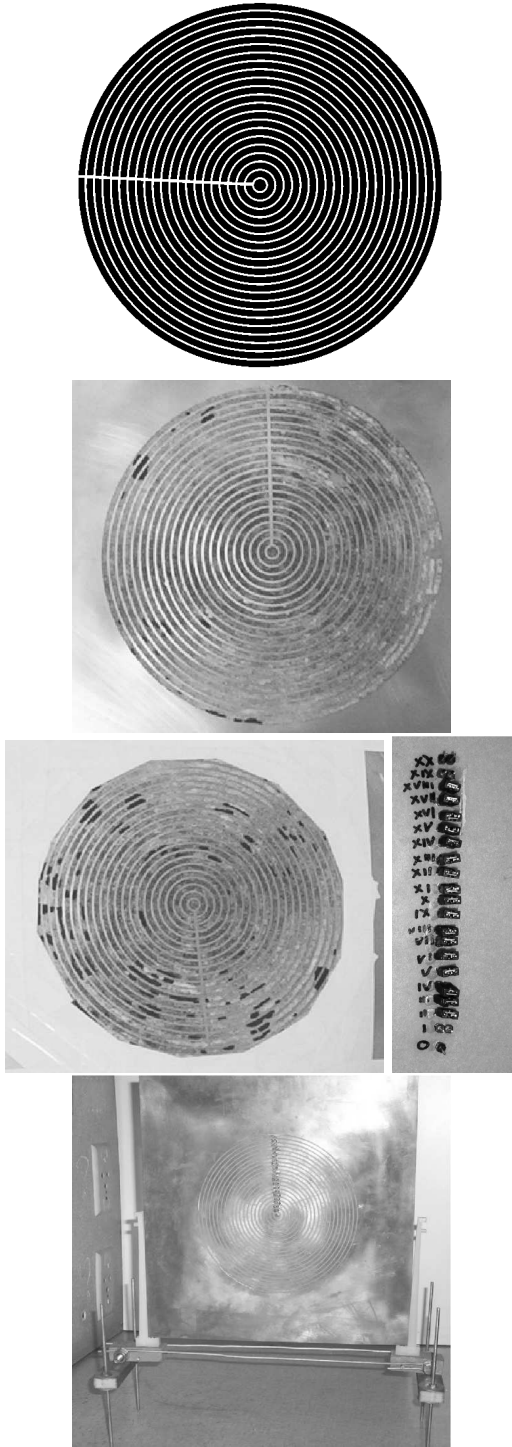


Figura 7: Plaqueta para medir las corrientes parásitas producidas por un dipolo magnético oscilante. (A) Esquema de las pistas conductoras en forma de herradura. (B) Placa con el esquema transferido a modo de negativo. Nótese la discontinuidad de algunas pistas (C) Corrección de las pistas dañadas con un marcador indeleble y protección de los bordes con cinta aislante. (D) Contactos en el reverso de la placa para medir las corrientes sobre cada pista en forma diferenciada. (E) Placa resultante montada sobre la base.

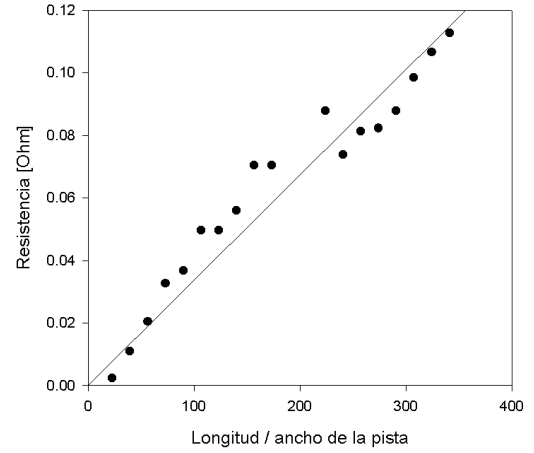


Figura 8: Resistencia de las pistas de la plaqueta sensora. La resistencia medida a cuatro puntas se gráfica contra la longitud media de las pistas. La pendiente calculada por regresión de cuadrados mínimos ( $r^2 = 0,97$ ) corresponde a la resistividad del material por unidad de espesor de la placa.

ras 7B y 7C). Luego, la plaqueta se sumergió durante 30 minutos en percloruro férrico ( $FeCl_3$ ), de modo que sólo aquellas porciones no protegidas contra la corrosión (o sea, las pistas aislantes) fueran efectivamente corroidas. La plaqueta fue lavada y nuevamente lijada. Sobre las pistas en cada extremo de la herradura se perforó un agujero pasante con un torno de mano. Finalmente, se soldó un par de contactos (pines) para cada pista como se muestra en la figura 7D. Con este procedimiento se construyeron dos placas cuadradas similares de distintos tamaños: la primera de 20cm de lado y la segunda de 30cm de lado. Estas placas fueron montadas sobre un soporte con patas de altura regulable como se indica en la figura 7E.

La conductancia de cada pista en herradura se midió a cuatro puntas aplicando un voltaje (DC) de 1.0 Volt. Como era de esperar, la resistencia ( $R$ ) de cada pista resultó proporcional a la longitud de la misma ( $R = \frac{L}{\sigma a e}$ , con  $L$  la longitud de la pista,  $a$  el ancho, y  $e$  su espesor) como se muestra en la figura 8. La resistividad (1/conductividad) por unidad de espesor de la placa de cobre resultó ser:  $\rho = (3,02 \pm 0,19) \times 10^{-4} \Omega$ .

#### IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

##### A. Conductividad de la aleación de bronce de los cilindros.

En el modelo de blindaje desarrollado anteriormente la conductividad del material juega un rol principal, de-

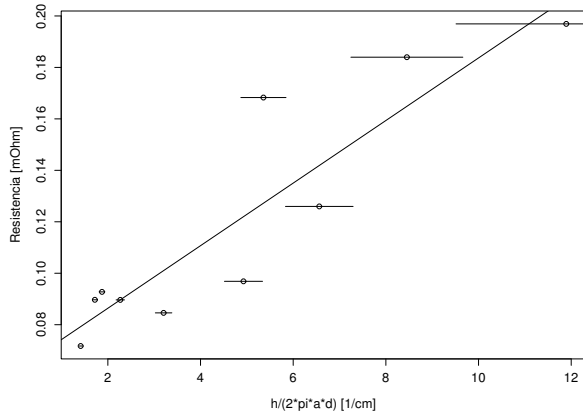


Figura 9: Gráfico de la resistencia ( $R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ ) en función de  $\frac{h}{2\pi ad}$  junto con el ajuste por cuadrados mínimos correspondiente ( $r^2 = 0,8$ ). La pendiente corresponde a la resistividad de la aleación de los cilindros. La desviación respecto de la linealidad puede deberse a variaciones en los potenciales de contacto para las distintas mediciones (recordar que el método supone que estos potenciales permanecen constantes, ver ecuación (19)).

finiendo entre otros factores la longitud de penetración o “skin depth” (ecuación (5)). Por ello, la conductividad de los cilindros se midió en forma directa como se describe en Arreglo Experimental. Brevemente, se colocó cada cilindro entre dos placas anchas conductoras y se midió la resistencia del sistema completo ( $R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ ) donde  $R$  es la resistencia del cilindro, y  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$  son las resistencias de los cables) a cuatro puntas (ver figura 4).

Se hace notar que la resistencia de cada cilindro es  $R = \frac{h}{\sigma 2\pi ad}$  ( $h$  es la altura,  $d$  es el espesor,  $a$  es el radio de cada cilindro y se ha usado que  $a \gg d$ ).

Por lo tanto, al cambiar el cilindro entre las placas,  $R$  también cambia pues depende de las dimensiones del cilindro pero  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$  permanecen sin cambio. Así, una vez realizada la medición de la resistencia total ( $R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ ) para cada uno de los cilindros (todos del mismo metal), se procedió a calcular la resistividad ( $\frac{1}{\sigma}$ ) de la aleación como la pendiente del gráfico de ( $R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ ) en función de  $\frac{h}{2\pi ad}$ . En la figura 9 se puede observar dicho gráfico junto con el ajuste por cuadrados mínimos correspondiente. La pendiente del ajuste es directamente la resistividad del material (en unidades del SI), a partir de la cual se calculó la conductividad en unidades Gaussianas:

$$\sigma = (7,4 \pm 1,2) \times 10^{16} 1/s \quad (20)$$

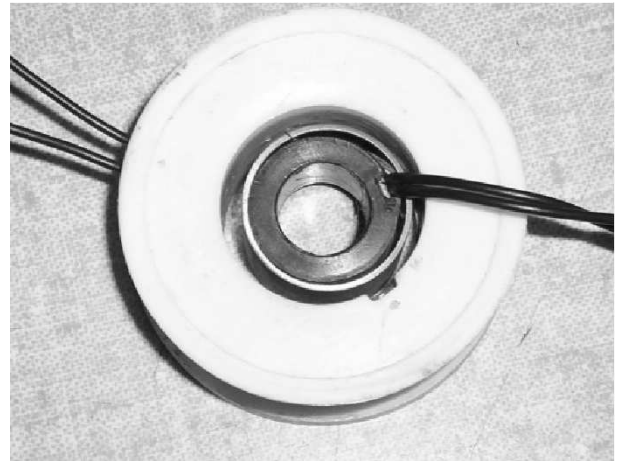
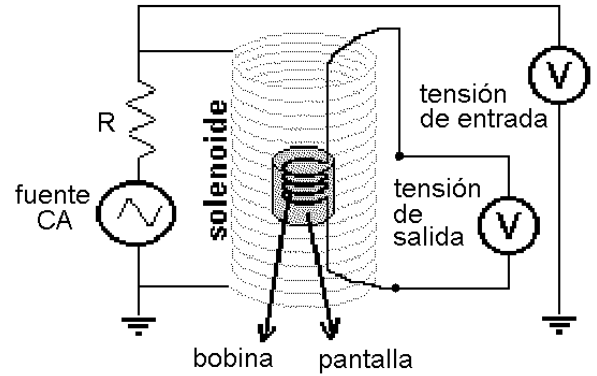


Figura 10: Dispositivo experimental utilizado para analizar el blindaje cilíndrico. (Arriba) Dos bobinas cilíndricas interpuestas por un cilindro hueco metálico. Para no exigir a la fuente, se colocó en serie con la bobina primaria una resistencia ( $R=100\Omega$ ). Para más detalles ver el texto. (Abajo) Fotografía de los cilindros y el blindaje utilizado.

## B. Apantallamiento cilíndrico

El blindaje magnético producido por un cilindro hueco fue estudiado empleando el dispositivo mostrado en la figura 10. En resumen, se dispusieron dos bobinas concéntricas (un primario de 300 vueltas, diámetro interior:  $2,7\text{cm}$  y altura:  $2\text{cm}$ , y un secundario de 300 vueltas, diámetro interior:  $1,2\text{cm}$  y altura:  $2\text{cm}$ ), y un cascarón cilíndrico de bronce entre medio de ellas. Se conectó el primario a una fuente de corriente alterna (Tektronix GFC 253) de frecuencia variable y en paralelo a un osciloscopio digital (Tektronix TDS220). El solenoide secundario fue ubicado en el interior del cascarón metálico y fue también conectado al osciloscopio. De este modo fue posible generar un campo (principalmente) uniforme en el interior de la bobina primaria y registrar (con el secundario) el campo magnético resultante del apantallamiento por el cascarón metálico.

El apantallamiento fue cuantificado como el valor ab-

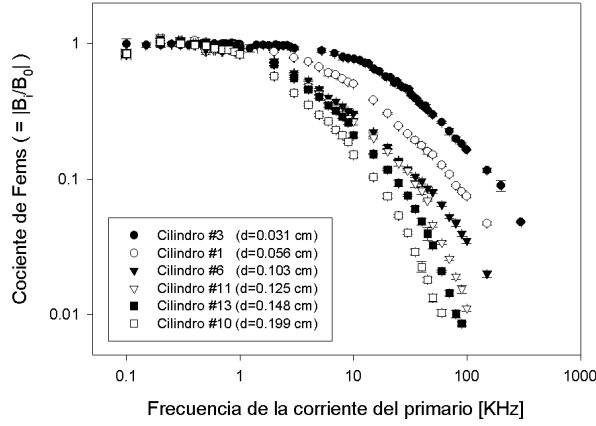


Figura 11: Curvas experimentales del apantallamiento cilíndrico. Nótese que el apantallamiento (entendido como  $|B_i/B_0| < 1$ ) comienza a hacerse significativo a distintas frecuencias para cada cilindro.

soluta del cociente de los campos (ver ecuación (10)). Sin embargo, experimentalmente, si se desprecian efectos de borde (o equivalentemente, si se consideran cilindros infinitos) los campos pueden ser tomados como proporcionales a las tensiones entre los extremos de los solenoides (pp. 205-206 [1]). Por lo tanto, el cociente de campos fue reemplazado por el cociente de voltajes medidos. Así, se tomaron dos series de mediciones para un amplio rango de frecuencias ( $10^2 - 10^5$  Hz): la primera en presencia del blindaje (como se muestra en la figura 10) y la segunda en ausencia del blindaje. Desde el punto de vista práctico, la impedancia de carga que soportaba la fuente de tensión dependía de la frecuencia aplicada (principalmente debido a la inductancia de la bobina primaria), por lo que la tensión (pico-pico) entregada por la fuente no resultó estrictamente constante. Por esto, la señal del secundario fue normalizada contra la tensión (real y medida con el osciloscopio) del primario (indicada por  $V_{1i}$  para las mediciones con blindaje y  $V_{10}$  para las mediciones sin blindaje). Por lo tanto, la ecuación (10) fue adaptada según:

$$\left| \frac{B_i}{B_0} \right| = \left| \frac{V_i/V_{1i}}{V_0/V_{10}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{4\pi^2 R d \sigma f}{c^2} \right)^2}} \quad (21)$$

donde se hizo explícita la dependencia con la frecuencia ( $f$ ). Las curvas experimentales obtenidas para seis cilindros de distintos espesores se muestra en la figura 11.

De esta figura pueden destacarse dos aspectos importantes. El primero es que el apantallamiento entendido como el cociente  $|B_i/B_0|$  sólo se hace efectivo (esto es:

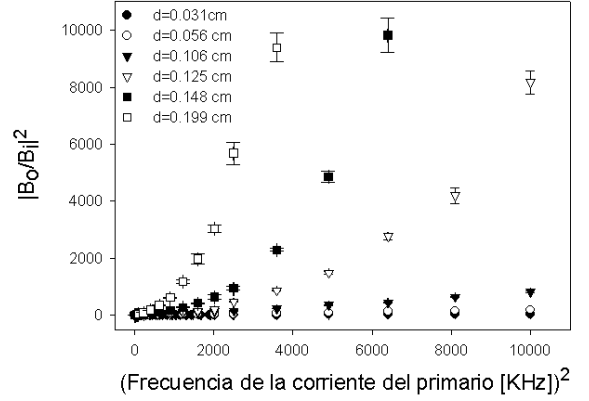


Figura 12: Las curvas representadas corresponden a los mismos datos experimentales de la figura 11, pero expresados en términos de la ecuación (22). Nótese que el primer segmento de cada curva es esencialmente lineal.

menor que 1) para frecuencias del orden de 1KHz, por lo que se presenta un umbral efectivo debajo del cual el campo no puede ser apantallado en forma notoria por estos cilindros. La segunda es que esta “frecuencia umbral” depende del cilindro a través del espesor del mismo. Esto último analizarse de un modo útil para poder calcular la conductividad del material. Transformando la ecuación (21) se obtiene:

$$\left| \frac{B_0}{B_i} \right|^2 = 1 + \tau f^2 \quad (22)$$

$$\tau = \left( \frac{4\pi^2 \sigma}{c^2} \right)^2 (Rd)^2 \quad (23)$$

Recordando que esta ecuación arrastra por herencia la aproximación:  $\delta \gg d$ , el primer tramo de las curvas transformadas según la ecuación (23) debe ser lineal en  $f^2$ . Esto mismo se aprecia en la figura 12.

Entonces utilizando un ajuste lineal para cada conjunto de valores se calculó  $\tau = \tau(R, d)$ , y se graficó  $\tau$  versus  $(Rd)^2$  (ver la figura 13). A partir de este ajuste y de la ecuación (23) se obtuvo el valor de la conductividad de los cascarones metálicos:

$$\sigma = (7,2 \pm 0,4) \times 10^{16} 1/s \quad (24)$$

Esté valor obtenido en forma indirecta a través de sucesivos ajustes y asumiendo la validez del modelo de apantallamiento cilíndrico para bajas frecuencias no presenta diferencias significativas con la conductividad medida en forma directa (sección anterior). Esto sugiere fuertemente que el modelo es absolutamente adecuado

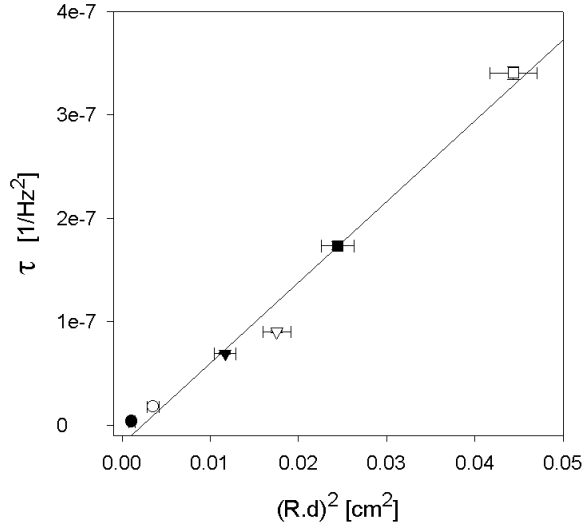


Figura 13: Relación lineal del coeficiente auxiliar  $\tau$  contra los parámetros de cada cilindro. El ajuste lineal por regresión de cuadrados mínimos  $\tau = A + B(R.d)^2$  dio los valores:  $A = (-2,45 \pm 1,21)10^{-02}[s] \sim 0$  y  $B = (9,96 \pm 0,541)[s/cm^2]$  ( $r^2 = 0,994$ ). Los símbolos indican el cilindro utilizado para cada dato, ver figura 12.

para describir el apantallamiento de este arreglo geométrico para el rango de frecuencias descrito.

Se aprecia entonces en la figura 14 los datos experimentales junto con las curvas teóricas con una muy buena coincidencia, como era esperable dados los altos grados de correlación de los ajustes. Se nota, sin embargo, que en algunos casos, los puntos medidos se “desprenden” por debajo de las curvas teóricas. Cabe destacar entonces que es para estas frecuencias que deja de valer la aproximación  $\delta \gg d$  y el campo es en realidad más apantallado que lo que predice el modelo aproximado. (Ver Apéndice)

### C. Geometría plana

En esta sección se desarrolla un análisis diferente al anterior, no sólo por la geometría utilizada sino además porque está dirigido a comprender cual es la forma del campo generado por un bobinado *sobre* una placa distante. Se discuten también las posibles causas de las discrepancias entre las mediciones y el modelo propuesto. Podría entenderse entonces como un paso más en complejidad respecto del modelo anterior en el cual los campos magnéticos eran considerados espacialmente uniformes.

Para esto, se conectó un solenoide (de 700 vueltas y  $(7,8 \pm 0,2)$ cm de diámetro) a una fuente de corriente

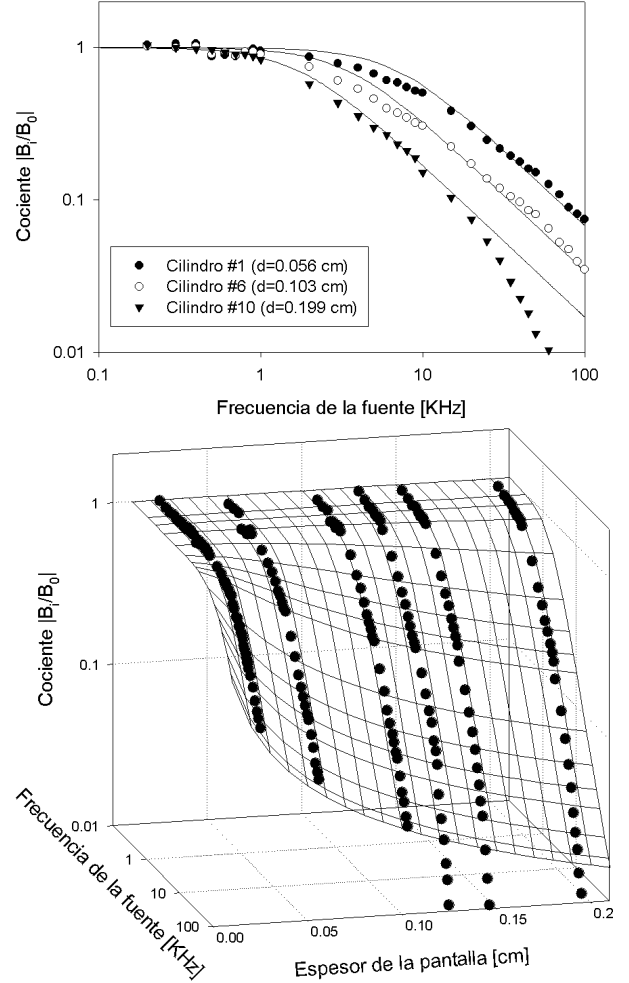


Figura 14: Ajuste de las curvas experimentales y el modelo. Se utilizó la ecuación 21 y el valor de conductividad obtenido ( $\sigma = (7,2 \pm 0,4) \times 10^{16} 1/s$ ).

alterna a una frecuencia de trabajo de 12KHz. En virtud de la ley de Faraday, este arreglo produce un campo magnético alterno que induce corrientes sobre cualquier cuerpo conductor. Éste se enfrentó centrado en altura y posición contra una placa sensora constituida de 20 espiras en forma de herraduras (ver Arreglo experimental), como se muestra en la figura 15.

Dado su diseño, cada espira de la placa puede utilizarse independientemente para medir el flujo concatenado de campo magnético en su interior, y dado que las espiras son concéntricas, fue posible medir el flujo del campo y su dependencia con respecto al radio de la espira en la cual se realizó la medición. Para ello, se pusieron en corto (con jumpers en la parte posterior de la placa, ver figura 7) todas menos una espira y la restante fue tomada con un amplificador Lock-in [9–11] cuya referencia

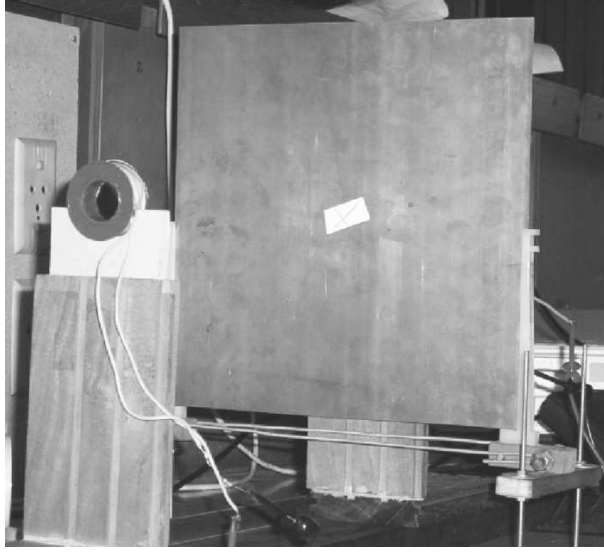


Figura 15: Disposición de la bobina enfrentada a una placa plana. En este caso se muestra una pantalla uniforme de bronce. Para el mapeo del campo utilizando el arreglo de espiras concéntricas el arreglo fue similar.

fue la fuente de tensión que alimentaba al solenoide.

En la figura 16 se observan mediciones de la fem en las pistas de la placa tomadas mediante el Lock-in a una distancia entre el bobinado y la placa de  $z_0 = 35\text{cm}$ ,  $z_0 = 6\text{cm}$  y  $z_0 = 3,5\text{cm}$  junto con el ajuste (utilizando el método de cuadrados mínimos) por la siguiente ecuación (sugerido por la ecuación (15)):

$$\epsilon = A \frac{\rho^2}{(\rho^2 + B^2)^{3/2}} \quad (25)$$

Donde  $A$  y  $B$  son parámetros del ajuste y  $\rho$  es el radio de la pista. Para “campos lejanos” ( $z_0 = 35\text{cm}$ ) vemos una dependencia cuadrática con el radio como era esperable para un dipolo puntal. Por otro lado, puede verse como a medida que la placa está más próxima a la bobina generadora del campo, la correspondencia con la curva teórica se hace cada vez menor. Dejando el análisis de esta disidencia para la sección Conclusiones, se analiza en lo subsiguiente que ocurre en los dos casos de “campo cercano”. En esta condición se observa un pico y un decaimiento posterior. En conjunto puede entonces sugerirse que a medida que la bobina se aproxima a la placa la totalidad del campo puede ser concatenado por la última espira. En esta condición, la forma de la curva puede entenderse fácilmente dado que a medida que nos alejamos del centro las espiras concatenan más flujo hasta alcanzar a concatenar una alta proporción del campo a un dado radio, dado que si bien el flujo concatenado es *siempre* monótonamente creciente con el tamaño de la espira, es también asintótico a un valor

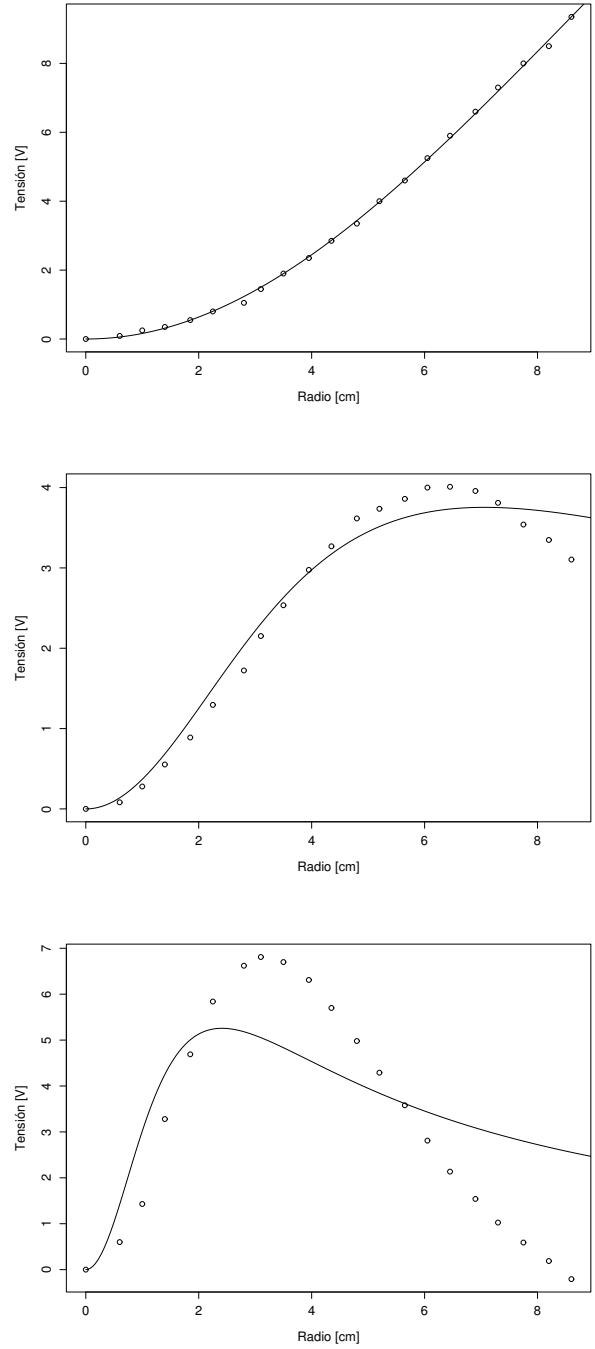


Figura 16: Tensión concatenada por espiras concéntricas de la placa sensora. El gráfico muestra la tensión medida para cada pista (20 espiras concéntricas de radios monótonamente crecientes) en función del radio de cada pista. De arriba hacia abajo la distancia entre el bobinado primario (generador del campo) y la placa sensora es de:  $35\text{cm}$ ,  $6\text{cm}$ , y  $3,5\text{cm}$ . No se aprecian las barras de error debido a que son muy pequeñas. Además se observa el ajuste por cuadrados mínimos mediante la ecuación (25).

máximo finito. Por lo tanto, para espiras más grandes, el flujo concatenado permanece esencialmente constante en tanto que la resistencia crece con la longitud de la pista haciendo caer la diferencia de potencial entre los extremos de la herradura. Esta explicación puramente intuitiva contiene, sin embargo, el comportamiento de la curva teórica (ver ecuación (15)), y de los datos experimentales. Se cree entonces que un análisis conjunto de los campos sobre la placa en mayor profundidad que lo que se presentó en este trabajo (como por ejemplo un barrido en distancias placa-bobina y frecuencia) junto con el análisis del apantallamiento plano realizado por otros alumnos [8] puede proveer una fuente interesante y aún no apropiadamente descrita [7, 8] para futuras prácticas de esta materia.

## V. CONCLUSIONES

Hemos presentado el desarrollo y los resultados de dos arreglos en los que se ha podido caracterizar el fenómeno complejo del blindaje de campos electromagnéticos en conductores. Bajo ciertas aproximaciones se ha encontrado que la correspondencia entre los modelos presentados y los resultados obtenidos son significativos. En este contexto, la práctica ha sido satisfactoria en cuanto a resultados. En particular, la similitud de los valores de conductividad medida con dos métodos básicamente distintos, o la dependencia cuadrática del campo eléctrico de un dipolo magnético oscilante con el radio. Sin embargo, la experiencia indica también que existen algunos factores que deben ser corregidos, y que en algunos casos las aproximaciones son netamente incorrectas. A partir de la figura 16 se puede concluir que el modelo para la geometría plana funciona correctamente dentro de lo esperado para una distancia entre el bobinado y la placa a partir de los 30 cm aproximadamente (se recuerda que la placa es un cuadrado de 30cm de lado). Esto puede deberse a que en el cálculo de las corrientes de Foucault sobre la placa no se tuvo en cuenta el campo que generan las mismas, el que corregiría el campo en las inmediaciones de la placa, que luego corregiría las corrientes, etc. De esta forma se entraría en un proceso iterativo que permitiría calcular el campo correctamente. El problema es que dada la complejidad de la geometría utilizada (en comparación con el modelo cilíndrico), debida a que no se utiliza un campo constante sobre la placa, sino un campo producido por una espira que se modela mediante un campo dipolar, las correcciones al modelo son muy difíciles de implementar. Se cree que esta corrección podría también explicar la desviación del modelo propuesto para el apantallamiento plano propuesto por Bellino y Fiorini [8].

Quedaría pendiente para otros trabajos contrastar el modelo teórico para altas frecuencias

(ver ecuación A.27) propuesto en el apéndice con el experimento.

## Agradecimientos

Deseamos agradecer a Fernando Monticeli por su asistencia incondicional a lo largo de este trabajo, al Prof. Salvador Gil y a Franco Fiorini por confiar en la realización de esta práctica, por las interesantes discusiones acerca de los modelos teóricos y la constante colaboración durante las mediciones.

## Apéndice: MODELO TEÓRICO PARA LA GEOMETRÍA CILÍNDRICA RESUELTO EN FORMA EXACTA

Se considera un cilindro metálico de longitud infinita y un primario también de longitud infinita. Por la simetría del problema el campo magnético solo tiene componente según  $\hat{z}$  (ver figura 1), y el campo eléctrico solo tiene componente según  $\hat{\phi}$ , además los campos solo pueden depender de  $\rho$ . Los campos son proporcionales a  $\exp(-i\omega t)$  y se utiliza la aproximación cuasiestacionaria, por lo que se desprecia la corriente de desplazamiento de Maxwell.

De la ecuación de Maxwell para el rotor del campo eléctrico en coordenadas cilíndricas se deduce que dentro del material:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \rho} + \frac{E_c}{\rho} = \frac{i\omega}{c} B_c \quad (\text{A.1})$$

De la ecuación de Maxwell para el rotor del campo magnético, también en coordenadas cilíndricas, se deduce que dentro del material:

$$-\frac{\partial B_c}{\rho} = \frac{4\pi}{c} J \quad (\text{A.2})$$

Usando la siguiente relación constitutiva:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{A.3})$$

Donde  $\sigma$  es la conductividad del material conductor, se puede reemplazar en la ecuación (A.2), obteniendo:

$$-\frac{\partial B_c}{\partial \rho} = \frac{4\pi}{c} \sigma E_c \quad (\text{A.4})$$

Combinando las ecuaciones (A.4) y (A.1) y reagrupando términos, se obtiene la siguiente ecuación de Bessel para el campo magnético:

$$\frac{\partial^2 B_c}{\partial \rho^2} + \frac{B_c}{\rho} + \frac{2i}{\delta^2} B_c = 0 \quad (\text{A.5})$$

Donde  $\delta$  es la longitud característica del efecto piel o “skin depth”:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad (\text{A.6})$$

Las condiciones de contorno son las siguientes (ver página 335-336 de [1]):

$$E_i(\rho = R) = E_c(\rho = R) \quad (\text{A.7})$$

$$B_i(\rho = R) = B_c(\rho = R) \quad (\text{A.8})$$

$$B_c(\rho = R + d) = B_0 \quad (\text{A.9})$$

Utilizando la ecuación (A.1), se reescribe la condición de contorno de la ecuación (A.7), quedando:

$$E_c(\rho = R) = \frac{i\omega}{2c} B_i R \quad (\text{A.10})$$

La ecuación (A.5) es una ecuación de Bessel, esta se puede simplificar un poco más utilizando la siguiente sustitución:

$$B_c = \exp S(\rho) \quad (\text{A.11})$$

De modo que la ecuación diferencial lineal queda en la siguiente forma no-lineal:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{2i}{\delta^2} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Ahora se realizan las siguientes hipótesis:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} \ll \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial \rho} \ll \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 \quad (\text{A.14})$$

Por lo que la ecuación diferencial queda de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{2i}{\delta^2} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Esta ecuación es muy fácil de resolver por el método de separación de variables, de hecho sus soluciones son:

$$S(\rho) = \pm \sqrt{-\frac{2i}{\delta^2}} \rho + C \quad (\text{A.16})$$

Donde C es una constante de integración. El siguiente paso es calcular las derivadas primera y segunda de la solución:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = \pm \sqrt{-\frac{2i}{\delta^2}} \quad (\text{A.18})$$

Se define  $K = \sqrt{-\frac{2i}{\delta^2}} = \frac{i-1}{\delta}$ . Para que se cumplan las hipótesis (ver ecuación (A.14)) se debe pedir que:

$$0 \ll |K| \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{1}{R} \ll \sqrt{|K|} \quad (\text{A.20})$$

La primera condición se satisface trivialmente, y la segunda se puede reescribir en la siguiente forma:

$$\frac{\delta}{2} \ll R \quad (\text{A.21})$$

Siempre que se cumpla esta condición se puede afirmar que la solución encontrada es una buena aproximación. Volviendo para atrás con la sustitución realizada, se obtiene la siguiente solución:

$$B_c = A e^{K\rho} + B e^{-K\rho} \quad (\text{A.22})$$

Ahora se aplican las tres condiciones de contorno (ecuaciones (A.8), (A.9) y (A.10)) para obtener el siguiente sistema de ecuaciones de 3x3:

$$\begin{aligned} B_0 &= A e^{K(r+d)} + B e^{-K(r+d)} \\ B_i &= A e^{KR} + B e^{-KR} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{i\omega}{2c} B_i R = -\frac{c}{4\pi\sigma} K (A e^{KR} - B e^{-KR})$$

Resolviendo el sistema se obtiene el cociente entre  $B_i$  y  $B_0$ , que es lo que interesa para este trabajo.

$$\frac{B_i}{B_0} = \frac{2}{2 \cosh Kd + KR \sinh Kd} \quad (\text{A.24})$$

A partir de la ecuación A.24 se pueden realizar dos aproximaciones más, una para el caso  $d \gg \delta$  y otra para el caso en que  $d \ll \delta$ . En este último caso, esto

significa que:  $|K|d \ll 1$ , entonces se puede aproximar la ecuación (A.24) en la siguiente forma:

$$\frac{B_i}{B_0} = \frac{1}{1 - i \frac{Rd}{\delta^2}} \Rightarrow \left| \frac{B_i}{B_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Rd}{\delta^2}\right)^2}} \quad (\text{A.25})$$

Sí, además se agrega la siguiente condición:  $Rd \gg \delta^2$ , entonces se llega a la siguiente ecuación para el cociente:

$$\left| \frac{B_i}{B_0} \right| = \frac{\delta^2}{Rd} \quad (\text{A.26})$$

Volviendo al otro caso, para el cual,  $d \gg \delta$ , la aproximación para la ecuación (A.24) queda:

$$\left| \frac{B_i}{B_0} \right| = 2\sqrt{2} \frac{\delta}{R} e^{-\frac{d}{\delta}} \quad (\text{A.27})$$

Lo que es muy interesante de esta última ecuación es que, además de haberse agregado un factor exponencial, el espesor de la placa ( $d$ ) es reemplazado por un espesor efectivo  $\delta$ .

- 
- [1] J.D.Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, (1975).
- [2] M.S. Nakwacki y M Agüero. *Apantallamiento magnético*. Laboratorio 5 Depto. Física FCEN (UBA), Marzo 2002. Disponible en: <http://www.fisicarecreativa.com>
- [3] A. Pichel y A. Kleiman. *Apantallamiento magnético producido por cilindros conductores huecos*. Laboratorio 5 Depto. Física FCEN (UBA), Julio 2002.
- [4] S. Gil. *Apunte teórico*. Disponible en: <http://www.fisicarecreativa.com>
- [5] S. Fahy, C. Kittel y S.G. Louie (1988). *Electromagnetic screening by metals*. Am. J. Phys. 56(11):989-992.
- [6] C. Kittel, S. Fahy y S.G. Louie (1988). *Magnetic screening by a thin superconducting surface layer*. Phys. Rev. B 37(1):642-643.
- [7] P. Rochon y N. Gauthier (1990). *Strong shielding due to an electromagnetically thin metal sheet*. Am. J. Phys. 58(3):276-277.
- [8] P. Bellino y F. Fiorini (2002). *Apantallamiento magnético debido a corrientes inducidas en conductores*. Disponible en: <http://www.fisicarecreativa.com>
- [9] J.H. Scofield (1994). *Frequency-domain description of a lock-in amplifier*. Am. J. Phys. 62(2):129-133.
- [10] K.G. Libbrecht, E.D. Black, C.M. Hirata (2003). *A basic lock-in amplifier experiment for the undergraduate laboratory*. Am J. Phys. 71(11):1208-1213.
- [11] H.D. Reisin y S.J. Ferrara. *Efecto fotoeléctrico*. Laboratorio 5 Depto. Física FCEN (UBA), Septiembre 2004. Disponible en: <http://www.fisicarecreativa.com>
- [12] En este contexto, el apantallamiento puede entenderse simplemente como la consecuencia de la disipación Joule producida por las corrientes inducidas dentro del medio conductor ubicado en el camino óptico de la onda electromagnética