

# ESTUDIO DEL CARÁCTER NO LINEAL DE UNA CUERDA VIBRANTE

Christian Balpardo, Verónica Ferrari, Dalmacio Justo,  
Laboratorio IV - Dpto. de Física - UBA - 15/12/1998

En este trabajo se realiza un estudio de la curva de resonancia en un sistema de características no lineales. Para ello se hace oscilar en un plano una cuerda por medio de una señal sinusoidal conocida y bajo la influencia de un campo magnético uniforme en la región de interés. Se recogen las amplitudes a medida que se varía la frecuencia de resonancia y con ellas se realiza un gráfico. También se varió la tensión de la cuerda y así se obtuvieron distintos gráficos de la curva de resonancia. Calculando algunos parámetros propios del sistema, se construyó la curva teórica para luego compararla con la experimental. Además se pudo apreciar algunas características del movimiento no planar y se estudiaron cualitativamente los fenómenos caóticos propios del sistema.

## I- INTRODUCCIÓN

El estudio de la curva de resonancia en sistemas que no responden a ecuaciones lineales es de sumo interés en estos momentos para la física. Es por ello que el presente trabajo se orientó al estudio del fenómeno en un sistema físico tan conocido como una cuerda vibrando.

La no linealidad de este sistema se debe a que la fuerza restitutiva de la cuerda es proporcional a  $x^3$ , donde  $x$  representa el apartamiento vertical respecto de la posición de equilibrio. Una consecuencia de esto son las oscilaciones anarmónicas.

En nuestro análisis, vamos a considerar primero las oscilaciones anarmónicas en un plano. Luego de tensarla, se excita la cuerda por medio de una señal eléctrica sinusoidal conocida y se mide la amplitud de oscilación en función de la frecuencia. Así se grafica la curva de amplitud-frecuencia o de resonancia. A continuación se aumenta progresivamente la tensión de la cuerda y se repite para cada caso el paso anterior, obteniendo así distintas curvas de resonancia.

También estudiamos el caso de oscilaciones no planares empleando una cuerda de material no magnético (cobre), y obtuvimos otra curva de resonancia para este tipo de sistema.

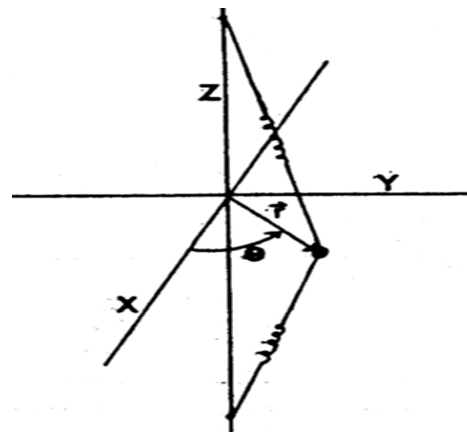
Luego, calculando los parámetros propios de nuestro sistema, y basándonos en

la ecuación implícita que presentaremos en la próxima sección, realizamos una simulación de la curva teórica.

Finalmente, construimos un diagrama de bifurcación para estudiar el caos del sistema.

## II- MODELO TEORICO

Para deducir la ecuación de movimiento que rige el comportamiento de nuestro sistema, consideramos el modelo de una masa sujeta a dos resortes idénticos y fijos de longitud natural  $l_0$  y constante  $k$ . La masa puntual es libre de moverse en el plano  $x$ - $y$  (fig.1).



**Fig.1** Modelo para la descripción de las oscilaciones no lineales de una cuerda. La masa es libre de moverse en el plano  $xy$ : se utilizarán coordenadas polares.

La fuerza restauradora que los resortes ejercen sobre la partícula es:

$$F = -4kr(1 - l_0 / \sqrt{l^2 + 4r^2}) \quad (1)$$

Donde  $l$  es el estiramiento de los resortes y  $r$  es la coordenada radial.

Realizando una expansión en serie de potencias de  $(r/l)$  para  $r < l$ , de la ecuación (1), la fuerza nos queda:

$$F = -4k(l - l_0)\left(\frac{r}{l}\right) - 8kl_0\left[\left(\frac{r}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{l}\right)^5 + \dots\right]$$

Expresión que podemos aproximar por:

$$F = m\ddot{r} \cong -4k(l - l_0)\left(\frac{r}{l}\right)\left[1 + \frac{2l_0}{(l - l_0)}\left(\frac{r}{l}\right)^2\right] \quad (2)$$

Lo cual da como resultado una fuerza restauradora cúbica, con un término no lineal cuando  $l \cong l_0$ . Definiendo:

$$\omega_0^2 \equiv \left(\frac{4k}{m}\right)\left(\frac{l - l_0}{l}\right) \quad (3)$$

$$K \equiv \frac{2l_0}{l^2(l - l_0)} \quad (4)$$

La ecuación (2) toma la forma:

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r(1 + Kr^2) = 0 \quad (5)$$

Esta es una ecuación diferencial en dos dimensiones, no lineal y conservativa. Su comportamiento depende únicamente de la relación entre  $l_0$  y  $l$ .

- si  $l_0 < l$ ,  $r = 0$  es un punto de equilibrio estable y representa las vibraciones de una cuerda en el modo fundamental.
- si  $l_0 > l$ , el origen es un punto de equilibrio inestable, pero existen dos puntos de equilibrio estable a cada lado de este, en  $r = \pm l$ , este caso representa el comportamiento de una banda elástica.

Para cumplir nuestro propósito nos limitaremos al caso  $l_0 < l$  ( $K > 0$ ). La ecuación (5) representa un sistema libre y sin rozamiento, pero para nuestro estudio

generalizaremos la ecuación considerando un término de amortiguamiento y la acción de una fuerza exterior:

$$\ddot{r} + \lambda \dot{r} + \omega_0^2 r(1 + Kr^2) = f(\omega t) \quad (6)$$

### Movimiento planar

Para este caso la ecuación (6) toma la forma de una ecuación de Duffing forzada, quedando:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x(1 + Kx^2) = f(\omega t) \quad (7)$$

Si se considera una excitación externa periódica de la forma:

$$f(\omega t) = H_0 \cos(\omega t) + G \sin(\omega t) \quad (8)$$

donde:  $F = \sqrt{H_0^2 + G^2} \quad (9)$

Despreciando los efectos transitorios, proponemos una solución estacionaria de la forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad (10)$$

Reemplazando (10) en la ecuación (7), con una excitación externa de la forma (8), queda:

$$\begin{aligned} &(-A\omega^2 + A\omega_0^2)\cos(\omega t) + \omega_0^2 KA^3 \cos^3(\omega t) \\ &- \lambda A\omega \sin(\omega t) = \\ &= H_0 \cos(\omega t) - G \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\cos^3(\omega t) = \frac{\cos(3\omega t) + 3\cos(\omega t)}{4} \quad (11)$$

y el hecho de la variación lenta de la amplitud, que permite despreciar el término  $\cos(3\omega t)$ , quedan dos relaciones:

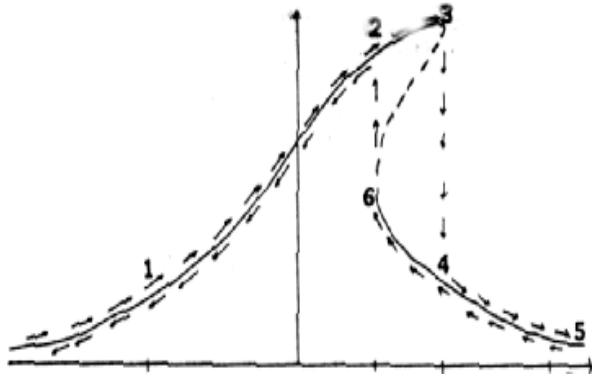
$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A + \frac{3}{4}\omega_0^2 KA^3 = H \quad (12)$$

$$\lambda\omega A = G \quad (13)$$

Considerando la relación (9) obtenemos:

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A + \frac{3}{4}\omega_0^2 KA^3\right]^2 + (\lambda\omega A)^2 = F^2 \quad (14)$$

que es una relación implícita entre  $A$  y  $w$ . Graficando  $A$  vs.  $w$  se obtiene la curva de resonancia no lineal de la fig.2.



**Fig.2** Curva de resonancia no lineal tipo.

Esta curva corresponde al caso de una cuerda vibrando en un plano –a una frecuencia cercana a la de resonancia-, que presenta histéresis debido a la coexistencia de dos estados estables entre los cuales es posible una transición discontinua cuando un parámetro es levemente variado: la llamada aproximación *cuasi-estática*. Este fenómeno se visualiza manteniendo la amplitud excitadora constante y escaneando lentamente en frecuencia. Como lo indica la fig. 2, al aumentar la frecuencia, la amplitud de la cuerda en el punto 3 decae abruptamente al punto 4 –de menor amplitud- y luego sigue disminuyendo hasta el punto 5 pero de manera continua. Por otra parte, si el barrido en frecuencia se hace en orden decreciente, la amplitud “salta” del punto 6 al punto 2 de mayor amplitud. En el intervalo de frecuencias entre el punto 6 y el 4, dos órbitas periódicas estables y una inestable –indicada en la fig. 2 por la línea punteada- coexisten. Según Landau, la parte 3-6 de la curva es inestable en el sentido que toda acción, tan pequeña como se quiera, sobre un sistema en este estado conduciría a un régimen oscilatorio correspondiente sólo a la raíz mayor (tramo 2-3) o a la menor (tramo 6-4) pero nunca a la intermedia.

Para resolver gráficamente la ecuación (14) nos resta aún hallar la constante de amortiguamiento  $\lambda$  del sistema. Landau<sup>1</sup> muestra que, imponiendo la condición de derivada infinita  $\frac{dA}{d\omega} = \infty$  en los puntos 6 y 3 de la fig.2, surge una igualdad que nos da  $\lambda$ , según la cual:

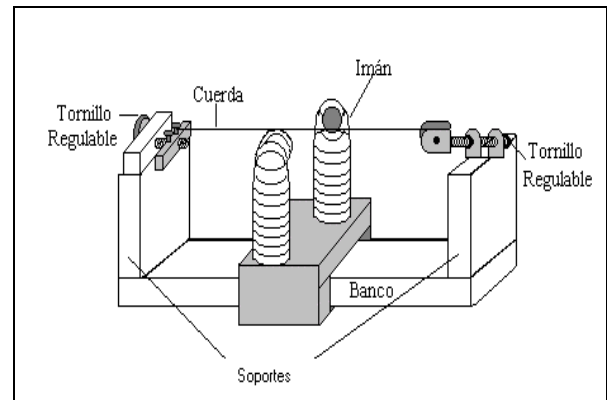
$$\lambda = \frac{F}{2m\omega_0 A_{max}} \quad (15).$$

### Movimiento no planar

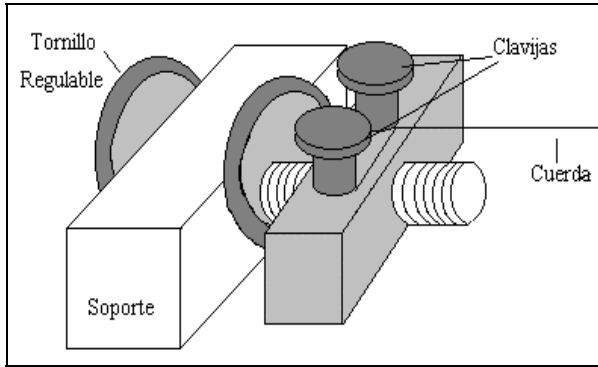
Otro fenómeno característico de la no linealidad en una cuerda vibrante son las oscilaciones no planares. En efecto, hasta aquí nuestro estudio se focalizó, dentro del modo fundamental, en las vibraciones planares. Sin embargo, según R. Cross<sup>2</sup>, el uso de una cuerda de material no magnético (cobre, por ejemplo) provoca vibraciones planares y no planares con precesión posible, dependiendo de las condiciones experimentales.

### III- DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

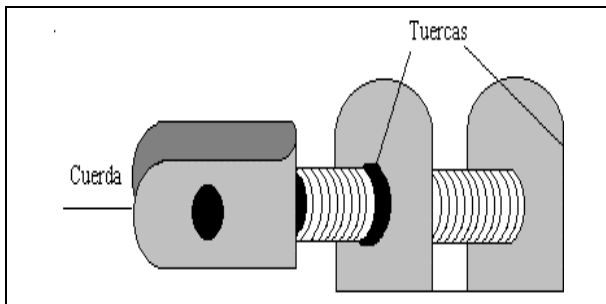
El dispositivo consiste en un banco de madera que posee dos soportes enfrentados horizontalmente, a los cuales se adosan un sistema de clavijas y de tornillos regulables que nos permitan variar la tensión de la cuerda que utilizamos (ver fig.3a). El sistema de clavijas utilizado puede ser observado en detalle en la fig.3b. En el centro geométrico de esta configuración colocamos un imán de 0.3 Tesla.



**Fig.3a** Dispositivo experimental



**Fig.3b** Detalle de sistema de clavijas.



**Fig.3c** Detalle del tornillo de fijación.

La cuerda utilizada en la primera parte del experimento (cuerda de guitarra eléctrica) es de material magnético y de alta conductividad ( $R=0.7\Omega$ ) de 0.2 mm de diámetro (la más aguda). Para variar la tensión, se mantuvo un extremo de la cuerda fijo al soporte y se la fue estirando por medio del sistema de clavijas del soporte opuesto. En cuanto a esto, la teoría predice mayor no linealidad para pequeñas tensiones. Sin embargo, hubo que cambiar reiteradamente el intervalo de tensiones hasta encontrar el rango óptimo ya que, para muy pequeñas tensiones, el movimiento del sistema era totalmente caótico y no planar, y para tensiones más grandes la cuerda sufría un estiramiento adicional y además se tendía demasiado al modelo lineal.

Para las oscilaciones no planares se utilizó una cuerda de cobre de 0.8 mm de diámetro, también de alta conductividad ( $R=0.2\Omega$ ).

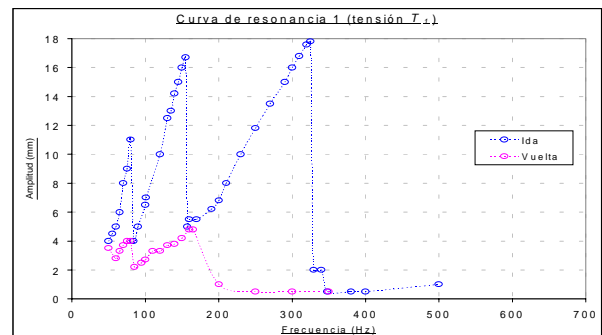
Este sistema fue conectado a un circuito eléctrico que constaba de un generador de funciones -por medio del cual se controlaba la frecuencia de la señal sinusoidal

excitadora-; un amplificador de audio -de modo que la corriente en el alambre sea lo suficientemente grande como para lograr una amplitud de algunos centímetros-; y una resistencia.

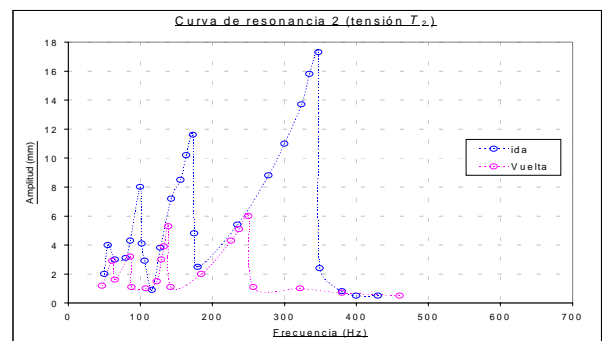
#### IV- RESULTADOS Y ANALISIS

##### • *Movimiento Planar (cuerda de acero)*

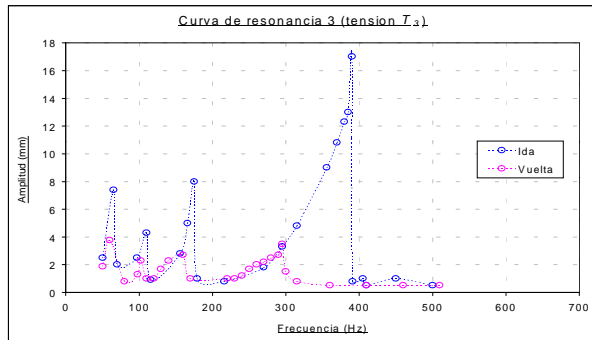
Se realizaron en primer lugar seis series de mediciones, variando entre ellas la tensión de la cuerda. Esto se llevó a cabo estirando progresivamente la cuerda de a intervalos regulares ( $T_1 < T_2 < T_3 \dots$ ). Para cada serie, se cubrió el rango de frecuencias de 50 a 700 Hz (ya que a frecuencias inferiores a los 50 Hz el movimiento era caótico y a más de 700 Hz, nos hallábamos en el modo normal siguiente, fuera de nuestro interés), rango dentro del cual se registraron los diversos armónicos de la cuerda.



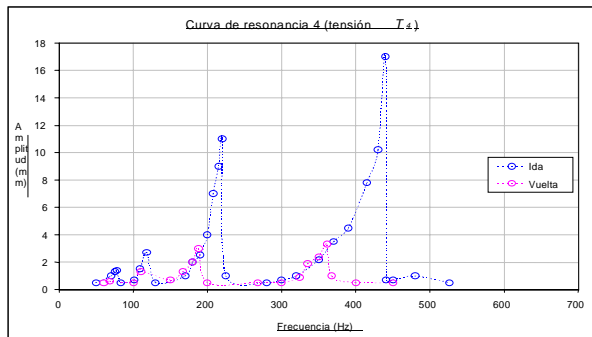
**Fig.4a** Curva de resonancia para la tensión  $T_1 = 13,95 \text{ N}$ .



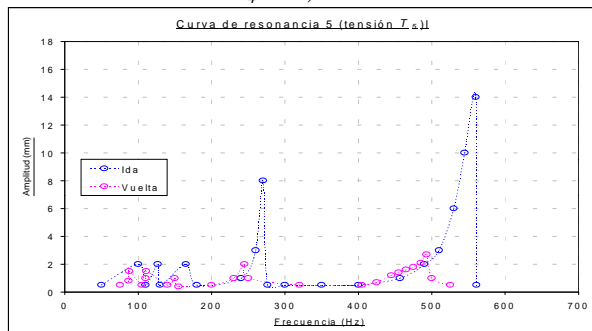
**Fig.4b** Curva de resonancia para la tensión  $T_2 = 14,32 \text{ N}$ .



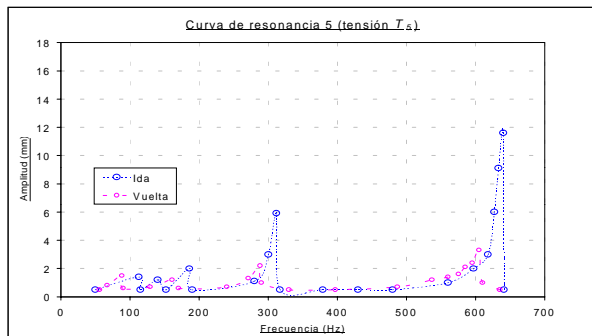
**Fig.4c** Curva de resonancia para la tensión  $T_3 = 18,6 \text{ N}$ .



**Fig.4d** Curva de resonancia para la tensión  $T_4 = 23,25 \text{ N}$ .



**Fig.4e** Curva de resonancia para la tensión  $T_5 = 32,55 \text{ N}$ .



**Fig.4f** Curva de resonancia para la tensión  $T_6 = 46,5 \text{ N}$ .

La primera curiosidad que se desprende de estas curvas es la aparición de no una, como lo predice la teoría, sino de múltiples resonancias. Una posible explicación de este fenómeno radicaría en que la teoría considera un sistema masa-resortes, mientras que en la práctica se trata de una cuerda con cierta elasticidad, lo cual equivaldría a muchas masas unidas por muchos resortes. Sin embargo, tanto Landau como Tuffillaro<sup>3</sup> en su estudio de una sola partícula predicen resonancias múltiples:

- La denominada *Resonancia primaria* ocurre cuando  $f \cong f_0$  donde  $f$  es la frecuencia forzada y  $f_0$  es la frecuencia natural del sistema.
- Sin embargo, también aparecen picos de amplitud menor para frecuencias forzadas que son una fracción racional de la frecuencia natural: se trata de las *Resonancias secundarias*, clasificadas según:

$$\text{si } f/f_0 = n \rightarrow \text{ultra-armónico}$$

$$\text{si } f/f_0 = 1/n \rightarrow \text{sub-armónico}$$

$$\text{si } f/f_0 = m/n \rightarrow \text{ultra-sub-armónico}$$

donde  $m$  y  $n$  son naturales. Landau demuestra en particular que hay resonancias secundarias para  $f \cong 1/2f_0$  y para  $f \cong 2f_0$ .

Es destacable también la evolución de los anchos de las curvas conforme aumenta la tensión. En estas condiciones se confirma la tendencia al modelo lineal, observando que cada vez los picos se vuelven más angostos y simétricos. Efectivamente, en la ecuación de Duffing que rige el sistema

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x(1 + Kx^2) = f(\omega t) \quad (7)$$

el factor de no linealidad está dado por  $K$ :

$$K \equiv \frac{2l_0}{l^2(l - l_0)} \quad (4)$$

Cuando la tensión es muy grande, la semilongitud  $l$  crece de igual manera, y el  $K$  rápidamente se hace muy pequeño, transformándose la ecuación de Duffing en

la clásica ecuación de movimiento del oscilador forzado amortiguado.

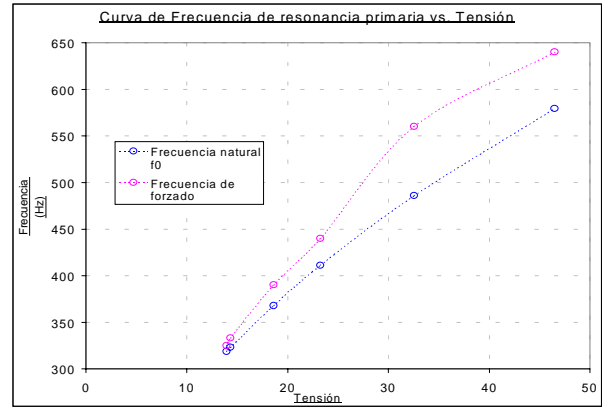
Otra curiosidad que se desprende de las curvas es la aparición de una concavidad sobre los picos, antes de alcanzar la amplitud máxima, hecho extraño debido a que todas las curvas debieran asemejarse en la forma a la primer figura (correspondiente a  $T_1$ ) para la cual la pendiente se hace cada vez más pequeña a medida que se llega al pico. Se verá más adelante que este fenómeno tiene una explicación relacionada con la aparición de órbitas no del todo planares. En efecto, para grandes amplitudes, notamos que el sistema se desestabilizaba y que la vibración ya no quedaba totalmente confinada a un plano, sino que una muy pequeña componente ortogonal a la cuerda y al movimiento planar aparecía.

También es curioso el fenómeno que aparece sobre todo para las últimas figuras (tensiones grandes) según el cual las curvas de la vuelta no parecen superponerse tan bien a las de la ida, y se ven corridas hacia la izquierda. Podemos atribuir esto a cambios en la elasticidad de la cuerda. Debido a la fuerte tensión a la que es sometida, la cuerda debe estirarse mucho más para alcanzar la amplitud a la que es forzada. Sufre entonces un estiramiento adicional que cambia sus propiedades elásticas; en particular, su longitud natural  $l_0$  y por ende su tensión de equilibrio  $T_0$  disminuyen. Dado que la

frecuencia natural  $f_0$  vale  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$  y

que la densidad lineal  $\rho_0$  se mantiene constante, la disminución de  $T_0$  conlleva a una disminución de la  $f_0$ , y la curva se corre hacia la izquierda.

En nuestro experimento, la resonancia primaria ocurre en el entorno de  $f_0$ , para las primeras curvas pero conforme se aumenta la tensión, ésta se aleja de  $f_0$ , como muestra la fig.5.



**Fig.5** Evolución de la frecuencia de resonancia primaria con la tensión. Comparación con la evolución de la frecuencia natural  $f_0$ .

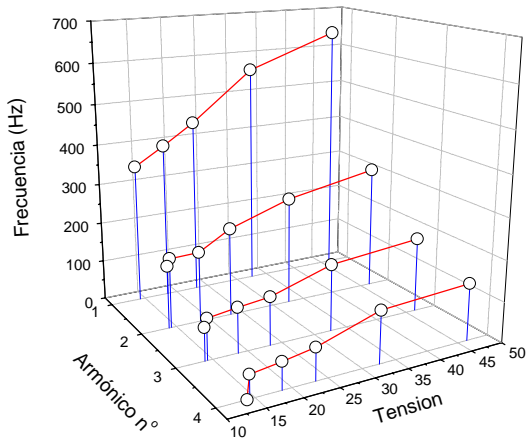
La curva azul representa la función teórica  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2T}{ml(T)}}$  donde  $m$  es la masa

de la cuerda (se la considera concentrada en su centro) y  $l$  es la semilongitud de la cuerda tensada, con  $T = 2k(l-l_0)$ .

La discrepancia entre los valores de resonancia medidos y los de la frecuencia natural calculados puede deberse a una medición no del todo acertada de  $k$ , ya que el método empleado para este fin fue algo rudimentario, y las mediciones no permitían gran precisión (ver Apéndice A). Aún así, es importante recordar que si  $f$  y  $f_0$  coincidieran, no se trataría de un modelo no lineal, sino de la clásica resonancia lineal. La teoría de las oscilaciones anarmónicas (para la resonancia primaria) es válida cuando  $f$  difiere levemente de  $f_0$ , es decir, cuando  $f = f_0 + \varepsilon$ .

La fig.6 muestra la evolución de la resonancia de los restantes armónicos en función de la tensión. En ésta se aprecia que las resonancias secundarias tienen un comportamiento similar al de la primaria en cuanto al corrimiento en frecuencias con la tensión (aunque con una rapidez de cambio

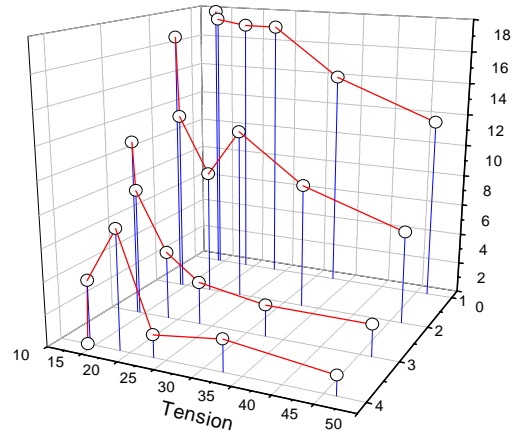
menor)



**Fig.6** Evolución de la frecuencia de resonancia de cada armónico con la tensión

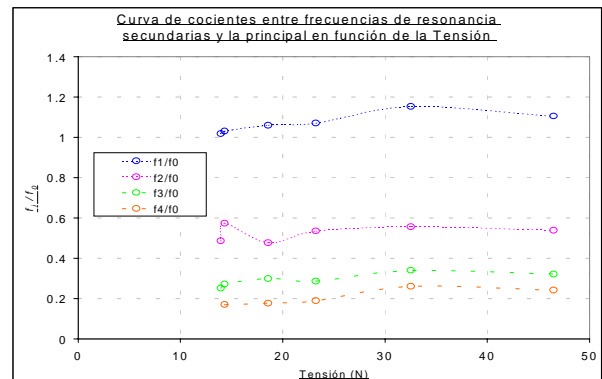
La fig.7 muestra la evolución en amplitud de cada armónico a medida que se tensiona la cuerda. Notamos en primer lugar que la tendencia general es que la amplitud disminuye con el aumento de tensión. Esto es entendible si se tiene en cuenta que con la tensión, aumenta la fuerza restauradora que tiende a mantener el centro de la cuerda en su posición de equilibrio (amplitud=0). Sin embargo, este comportamiento difiere según el armónico, notando que para los más bajos, el decaimiento es mucho más acelerado. También notamos una brusca caída en la amplitud del segundo armónico para la tensión 3, compensada por un salto en el cuarto armónico. Esto podría interpretarse como un problema en la estabilidad del sistema en la cercanía de las resonancias. En efecto, notamos que el vuelo cercano de un avión era suficiente para que la amplitud de una resonancia decayera abruptamente a un valor menor. Esto podría haber ocurrido en el caso del segundo armónico (para la tensión 3) pero no explica el máximo del cuarto

armónico.



**Fig.7** Evolución de la amplitud de cada armónico con la tensión

Es notable por otra parte la constancia en los cocientes entre la frecuencia de cada armónico y la frecuencia natural  $f_0$ . La fig.8 muestra que para cada tensión, si bien las frecuencias de resonancia se van corriendo, se mantiene la proporción en este corrimiento entre los diversos armónicos y la frecuencia  $f_0$ . Por ejemplo, para la tensión 5, la frecuencia de resonancia del 2do. armónico es  $f_2$ , y el cociente  $f_2 / f_0$  vale 0,56 ; para la tensión siguiente ni  $f_0$  ni  $f_2$  valen lo mismo, sin embargo el nuevo cociente sigue valiendo aproximadamente lo mismo, es decir 0,54.



**Fig.8** Cocientes entre la frecuencia de cada armónico y la natural propia de cada tensión. Esta razón es aproximadamente constante.

Otra curiosidad surge al calcular estos cocientes. En promedio, siendo  $Q_i = f_i / f_0$

$$Q_1 = 1,07$$

$$Q_2 = 0,53$$

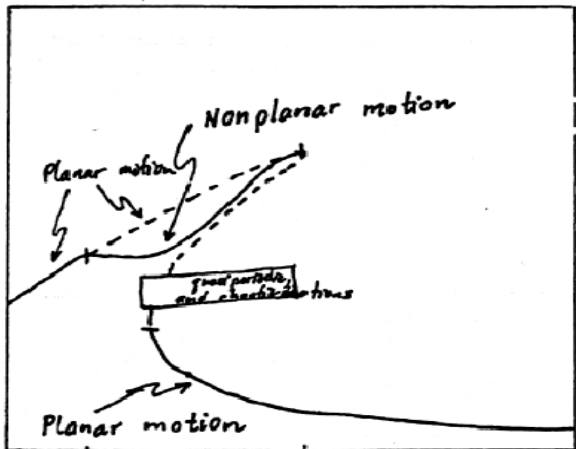
$$Q_3 = 0,31$$

$$Q_4 = 0,21$$

Estas cantidades confirman que estamos frente a la serie sub-armónica de la fundamental, es decir  $(1/2)f_0$ ,  $(1/3)f_0$ , y  $(1/5)f_0$ . Por alguna razón el armónico  $1/4$  no aparece o bien ha sido confundido con el  $1/5$  debido a algún error de medición.

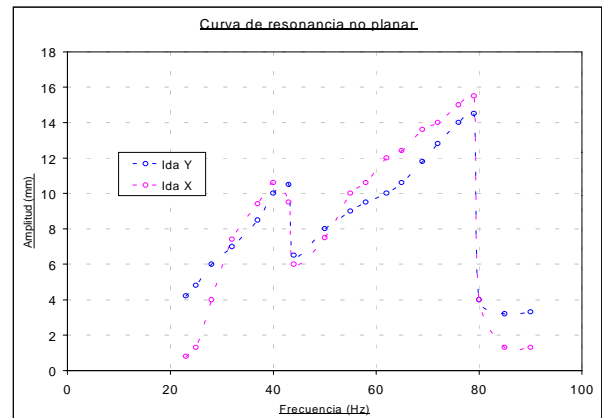
• Movimiento No Planar (cuerda de cobre)

Para estudiar el movimiento no planar empleamos una cuerda de cobre que por ser un material no magnético, bajo la influencia del mismo campo que antes, permite oscilaciones en las dos dimensiones perpendiculares a la longitud de la cuerda. El procedimiento de medición fue el mismo: para cada frecuencia se tomaron las amplitudes de vibración en los planos x e y, y se construyó la curva de resonancia. La componente y es la misma que se venía tomando en el caso planar es decir, la oscilación transversal vertical, mientras que la nueva componente x que aparece representa la oscilación transversal horizontal. Tuffillaro predice en este caso un comportamiento particular, esquematizado en la fig.9.



**Fig.9** Curva de resonancia teórica para movimiento no planar (componente y vertical)

Según la fig.9, la característica esencial de la curva de resonancia para la componente transversal vertical consiste en la aparición de una concavidad a partir de una frecuencia algo menor que la de amplitud máxima. Esto no sucede para el movimiento planar, cuya curva sigue la línea punteada de la fig.9. Además se espera que al caer abruptamente la amplitud luego de la resonancia, ésta vuelva a una órbita planar. Nuestra curva de resonancia no planar se muestra en la fig.10.



**Fig.10** Curva de resonancia obtenida para movimiento no planar. Se grafican las dos componentes ortogonales al plano de la cuerda.

La semejanza entre las figuras 9 y 10 es notoria. Se aprecia en esta última el salto brusco de movimiento planar al no planar en el principio de la curva, donde la componente y que dominaba casi exclusivamente (1 dimensión) se ve en pocos Hertz alcanzada en magnitud por la componente x. Sin embargo, es en la segunda resonancia que el fenómeno de la concavidad en y se observa con mayor nitidez. También allí aparece luego de la caída de amplitud la vuelta al movimiento no planar.

Por cuestiones de escasa robustez del alambre de cobre, no se hicieron las mediciones de la vuelta. Este se quebraba fácilmente al ser flexionado, y había que descartar entonces todo el conjunto de mediciones tomadas hasta el momento, y volver a empezar desde el comienzo. Observamos también la presesión del alambre para ciertas frecuencias cercanas a las de resonancia, pero no serán estudiadas aquí.

## V- SIMULACION

En esta parte nos propusimos calcular los parámetros que rigen nuestro sistema a partir de las mediciones realizadas e insertarlos en la ecuación (14) para luego hacer una simulación matemática de la curva de resonancia primaria de la figura 4a.

$$\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)A + \frac{3}{4}\omega_0^2 KA^3 \right]^2 + (\lambda\omega A)^2 = F^2 \quad (14)$$

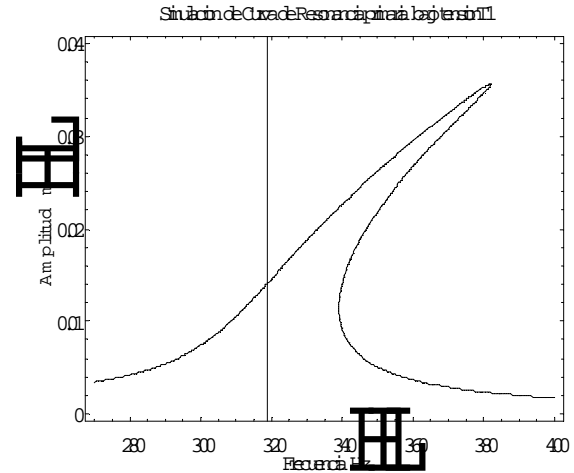
Los valores de las constantes dieron:

- $m = 4,01 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \pm 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$
- $k = 9309 \text{ N/m} \pm 275 \text{ N/m}$
- $\omega_0^2 = 4.014.388,5 \text{ Hz}^2 \pm 1.118.873,2 \text{ Hz}^2$
- $F = 9,987 \cdot 10^{-4} \text{ N} \pm 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ N}$
- $\lambda = 0,350 \text{ Hz} \pm 0,171 \text{ Hz}$

La ecuación (14) es implícita en las variables  $A$  (amplitud) y  $w$  (frecuencia angular forzada). En esta ecuación podemos además hacer un cambio de variable  $w = 2\pi f$  de manera que quede implícita en las variables  $A$  y  $f$ . Reescribiéndola con los valores numéricos correspondientes, nos queda:

$$117.662,31y^6 + 686.04 \left( 1 - 9,83 \cdot 10^{-6} x^2 \right) y^4 + \left( 9,67 \cdot 10^{-11} x^4 - 1,9665 \cdot 10^{-5} x^2 + 1 \right) y^2 = 9,97 \cdot 10^{-7}$$

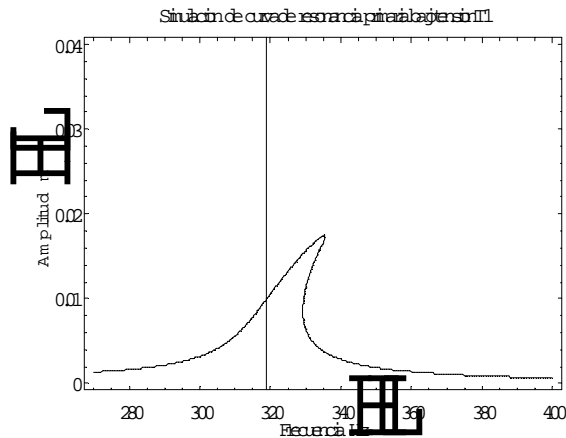
Empleando el *Mathematica 3.0*, y haciendo uso del programa 'Implicit Plot' que viene dentro del pack de herramientas de gráfico, pudimos construir esta curva dada por la fig.11.



**Fig.11** Curva de resonancia teórica simulada a partir de los parámetros propios del experimento

En ella reconocemos la forma esperada, y observamos que incluso está centrada en la vecindad de  $f_0 = 319 \text{ Hz}$ . Sin embargo, aparece una gran discrepancia, ya que la amplitud, si bien da dentro del orden de magnitud, vale casi el doble de la medida (0,035m teórica contra 0,018m experimental). Este hecho puede denotar un empleo no muy apropiado en este caso de la fórmula que da el decaimiento, ya que ésta sólo contempla una resonancia única, y en nuestro caso coexistían muchas frecuencias resonantes. Sin embargo –y esta es la razón por la que el término de decaimiento  $-1,9665 \cdot 10^{-5}$  es el único no redondeado al centésimo- la más leve variación de este término degeneraba por completo nuestra curva.

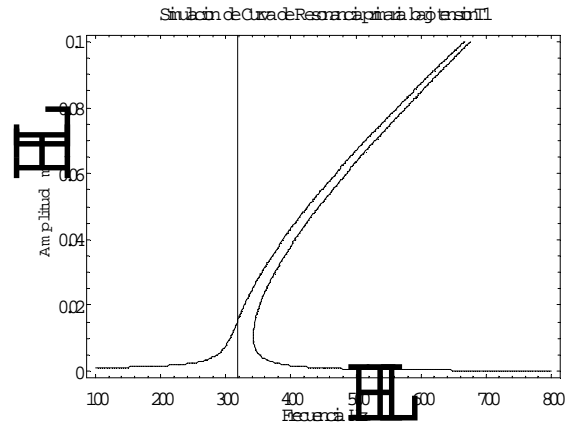
No pudiendo provenir entonces de este parámetro, la discrepancia debía atribuirse a las demás constantes. Sin embargo, aquí notamos que sin necesidad de variarlas todas, con el sólo hecho de disminuir la amplitud de forzado de  $9,97 \cdot 10^{-7}$  a  $1,5 \cdot 10^{-7}$ , la curva obtenida se ajustaba casi perfectamente a la obtenida experimentalmente (fig.12).



**Fig.12** Curva de resonancia teórica con amplitud de forzado ajustada al experimento

Este hecho no garantiza que el error de la simulación radique obligatoriamente en aquel parámetro, las demás constantes pudiendo estar mal evaluadas también. No obstante, para todas éstas –omitiendo el decaimiento- la discrepancia debería ser muy grosera como para variar substancialmente la forma de la curva (lo comprobamos mediante otras simulaciones). La amplitud de forzado, en cambio, sólo debería variar en un factor de 6,6. En el Apéndice B se muestra que la aproximación empleada en el cálculo de esta amplitud es poco rigurosa debido a la complicada configuración geométrica del problema. Parecía fundamentado entonces atribuir el error de la simulación a este hecho.

Finalmente, aprovechamos la herramienta del modo ‘Implicit Plot’ para evidenciar la importancia de la fricción del sistema, simulando la misma curva pero con rozamiento casi nulo en la fig.13.

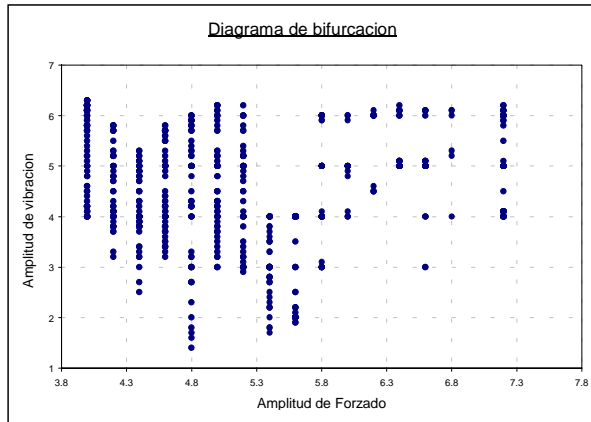


**Fig.13** Curva de resonancia simulada con rozamiento casi nulo. Las dos ramas se reúnen en el infinito. Físicamente esto implicaría amplitudes infinitas desde cualquier sentido de barrido en frecuencia.

## VI- DIAGRAMA DE BIFURCACION

Para finalizar nuestro estudio del sistema de la cuerda vibrante, nos propusimos construir un diagrama de bifurcación. Esto se debió a que en muchas situaciones en las que esperábamos medir órbitas mas o menos periódicas, nos encontrábamos con que la cuerda vibraba de manera totalmente caótica e impredecible. Sin embargo, este fenómeno no ocurría siempre, sino que dependía de algún parámetro del experimento (baja frecuencia, escasa tensión, baja amplitud del forzado). Lejos de desechar esta información, consideramos interesante visualizar la transición de movimiento caótico a movimiento regular. El diagrama de bifurcación es la herramienta matemática indicada para este fin ya que consiste en variar gradualmente la amplitud de forzado, tomando de manera periódica, para cada una de ellas, valores de la amplitud de vibración de la cuerda. El período con que se toman estas últimas amplitudes es justamente el de la fuerza periódica. Así, dada una amplitud de forzado fija, si el movimiento resulta periódico, la amplitud de vibración de la cuerda será siempre la misma: esto se traducirá gráficamente por un punto en el

diagrama de bifurcación. En cambio, para movimiento caótico, dada una amplitud de forzado fija, la amplitud de vibración se traduce por una cantidad de puntos alineados sobre el eje de ordenadas. Nuestro diagrama de bifurcación se grafica en la figura 14.



**Fig.14** Diagrama de bifurcación para nuestro sistema de la cuerda vibrante. En él se distinguen las amplitudes de forzado para las cuales el movimiento es caótico o cuasi-periódico (no hallamos órbitas periódicas).

Esta figura se logró a baja frecuencia (5 Hz) ya que era el único modo de poder medir la amplitud de vibración de la cuerda con precisión. Esta última se llevo a cabo filmando el movimiento con una cámara de alta velocidad de obturación (1/3000 seg.) y con gran capacidad de toma (30 cuadros/seg.). Durante la filmación se tomaron 16 amplitudes de forzado en orden creciente, seleccionando 60 puntos para cada una de ellas. El período de toma fue de 0,2 segundos. Esto se logró digitalizando la filmación y, mediante el soft “Media Player”, guardando solo los cuadros equiespaciados en 0,2 segundos.

Nuestro diagrama muestra que la transición de movimiento caótico a movimiento cuasi-periódico (coexistencia de varios periodos) ocurre para amplitudes de forzado superiores a 5,8. Sin embargo, no alcanzamos a ver el movimiento periódico

(un sólo periodo) que predice la teoría. Además, cuando la amplitud de forzado supera los 7 nuestro movimiento volvía a ser caótico, hecho que no debería suceder.

## VII- CONCLUSIONES

Del estudio de este sistema podemos concluir que el comportamiento no lineal es bastante notorio. Es importante destacar que la no linealidad no proviene de ninguna excentricidad externa (campo magnético, corriente circulante) sino de una corrección del modelo físico propuesto (se aproxima un orden más). Vemos entonces, que muchos sistemas mecánicos considerados en la teoría como lineales presentan en la práctica un comportamiento no lineal.

Las curvas en función de la tensión nos muestran la evolución de las propiedades del sistema, como el corrimiento presentado por las frecuencias de resonancia, tanto primarias como secundarias, y el decaimiento de las amplitudes. Se confirmó la tendencia al modelo lineal (estrechamiento y forma simétrica de los picos) con el aumento de la tensión. También confirmamos la forma especial de la curva de resonancia no planar empleando una cuerda no magnética (cobre) midiendo las amplitudes de las dos componentes.

En cuanto a la simulación matemática, comprobamos que, a pesar del gran error en la determinación de algunos de los parámetros, la forma de la curva (en particular el rango de frecuencias) es la esperada. Encontramos que la amplitud no se corresponde a lo medido por un factor de escala de 2. Sugerimos una corrección de este problema disminuyendo la amplitud de forzado en un factor de 6.6, resultado que por otro lado cae dentro de la incerteza del cálculo de este parámetro.

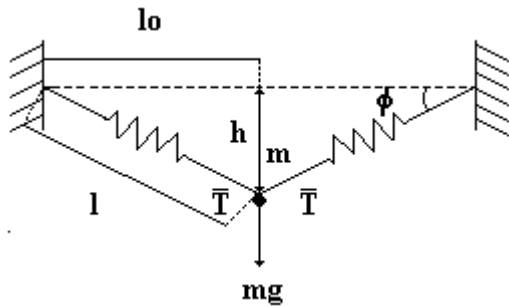
Para hacer un estudio mas exhaustivo del problema se podría recurrir a un modelo matemático que prediga la existencia de las resonancias secundarias; Landau sugiere un análisis de este fenómeno calculando las

frecuencias y amplitudes correspondientes de cada armónico.

Finalmente, dada la observación de fenómenos caóticos durante las mediciones, resultó interesante construir un diagrama de bifurcación para visualizar orbitas cuasi-periodicas (coexistencia de distintos periodos) y caoticas. Sin embargo, no se hallaron órbitas periódicas, tal vez por las

condiciones de muy baja frecuencia. Otros trabajos al respecto de este tema sugieren frecuencias del orden de la natural. En nuestro caso esto era irrealizable ya que la frecuencia natural de la cuerda era superior en dos órdenes a la máxima frecuencia compatible con el instrumental de medición (cámara).

### APENDICE A Medición de la constante elástica $k$ de la cuerda.



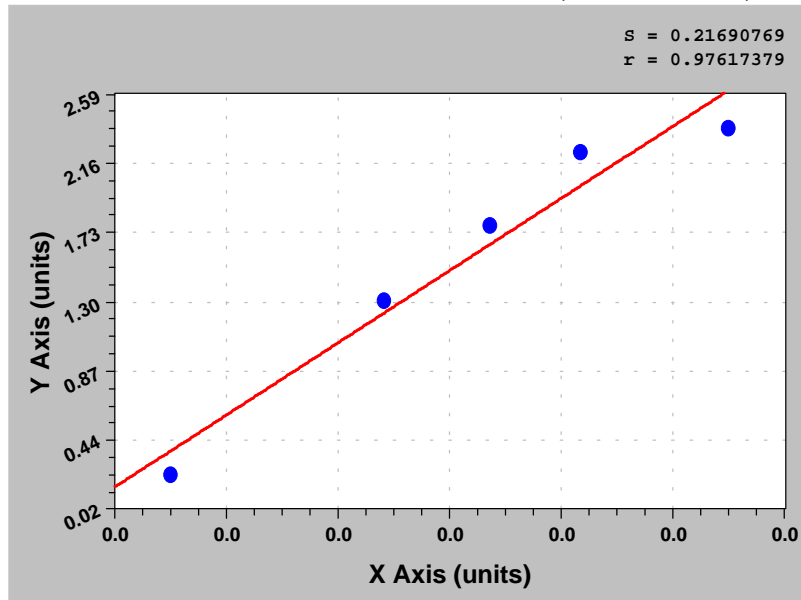
$$\text{sen } \phi = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l}$$

$$mg = 2T \text{sen } \phi = 2k(l - l_0) \frac{\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l}$$

Se obtiene  $k$  linealizando en la variable  $2(l - l_0) \frac{\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l}$

Para ello se cuelgan distintas masas del centro de la cuerda, y se mide la elongación  $l$  que sufre. Se construyó una tabla y al linealizar obtuvimos

$$k = 9309,12 \text{ N/m} \pm 275,39 \text{ N/m}$$



### REFERENCIAS

- <sup>1</sup> Landau, L. D. *Curso de Física Teórica, Vol.1: Mecánica.* p.140-145
- <sup>2</sup> Cross, R. *A simple measurement of string motion,* Am. J. Phys. **56** (11), 1988.
- <sup>3</sup> Tufillaro, N. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos,* Addison-Wesley, p.138-150