

Análisis de un gradiente de índice de refracción y estudio de la difusión entre líquidos

Pablo Pérez y Tomás E. Tecce

Laboratorio 4, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

En esta experiencia se hace incidir un haz de luz láser sobre una zona en la cual dos líquidos de diferentes índices de refracción se mezclan por difusión. Este proceso de mezcla genera una variación espacial y temporal de la concentración, la cual produce un gradiente de índice de refracción que hace que el haz de luz siga una trayectoria curva. Midiendo esta refracción dependiente de la posición y el tiempo, puede determinarse el valor de la difusividad de las partículas de soluto.

I. Introducción

Un haz de luz puede ser desviado utilizando un prisma, que consiste en un trozo de material de ancho variable con índice de refracción constante. Pero ésta no es la única forma de hacerlo; también puede lograrse usando un material de ancho constante, con un gradiente de índice de refracción a lo largo del mismo. Ejemplos de este hecho son la formación de espejismos sobre superficies calientes (la arena del desierto o el asfalto de una ruta, por ejemplo) y las "ondas de calor" que se ven sobre una estufa o una fogata. En estos casos es la variación de temperatura del aire la que produce variaciones en el índice de refracción; el enfoque de un haz de luz por un gradiente de temperaturas en un medio ha sido estudiado por Green¹.

En nuestra experiencia, sin embargo, el gradiente de índice de refracción se produce por variación de la concentración de soluto en un sistema formado por dos líquidos -agua y una solución acuosa- en proceso de mezcla por difusión. La variación de la concentración en el espacio y el tiempo debida a la difusión genera variaciones de índice de refracción. Existen varias técnicas para el estudio de la difusión entre líquidos: por ejemplo, una que utiliza interferometría holográfica² y otra que estudia el movimiento de flotadores inmersos en el líquido³. Este trabajo se basa en el experimento propuesto por Gaffney y Chau⁴ a partir de un trabajo de Barnard y Ahlborn⁵, y tiene como ventaja la relativa sencillez del aparato experimental.

El estudio de la difusión de un soluto a través de una interfase entre una capa de agua y una de solución acuosa tiene especial interés en el estudio de la dinámica de los estuarios. Al ser el agua del río que desemboca en el mar menos densa que el agua salada, se forma una discontinuidad en la densidad en función de la profundidad, que se denomina haloclina. En cuanto a aplicaciones prácticas de los índices de refracción variables, existen compañías que comercializan lentes de ancho uniforme que funcionan con este principio (llamadas lentes GRIN, por GRAdient INdex)⁶, y se han usado celdas llenas de líquido de índice de

refracción variable similares a las utilizadas en esta experiencia para estudiar el comportamiento de sensores de fibra óptica⁷.

II. Descripción del dispositivo experimental

Para realizar las mediciones fue necesario construir un dispositivo que permitiese hacer pasar un haz láser por una solución con un gradiente de concentración perpendicular a la incidencia del haz. A continuación pasamos a describir este dispositivo, que puede verse en la figura 1. En la parte central colocamos un recipiente con forma de prisma de base rectangular y caras transparentes y delgadas, de acrílico, de 9 x 6,5 x 15 cm, y en su interior colocamos los líquidos. Hicimos incidir el haz de un láser He-Ne sobre una varilla cilíndrica de cristal transparente que abría el haz en un plano en forma de abanico. Dicha varilla, que jugaba el papel de lente cilíndrica, fue colocada a 45° respecto del suelo de forma que el haz con forma de abanico plano incidiera sobre el recipiente con ese mismo ángulo. El haz atravesaba el recipiente de lado a lado, sufría una deflexión y terminaba incidiendo sobre una pantalla milimetrada en la que se hicieron marcas de referencia. La forma del haz de luz sobre la pantalla se registró mediante una minicámara conectada a una PC, que tomaba imágenes de la pantalla a intervalos regulares, guardando las imágenes como archivos que después serían analizados.

Fue necesario que tuviésemos ciertas consideraciones con las distancias involucradas para poder tomar ciertas aproximaciones en los cálculos. La distancia z_0 de la lente al recipiente tenía que ser lo suficientemente grande como para que los rayos que llegaban de la varilla fueran casi perpendiculares a la cara del recipiente. Por otra parte, la distancia z de la celda a la pantalla también tenía que ser grande como para permitir una deflexión suficiente para trazar una buena curva. El ancho del recipiente d , es decir la distancia que recorren los rayos dentro del mismo, debía ser relativamente pequeña dado que en las cuentas se consideró que el gradiente depende de la posición

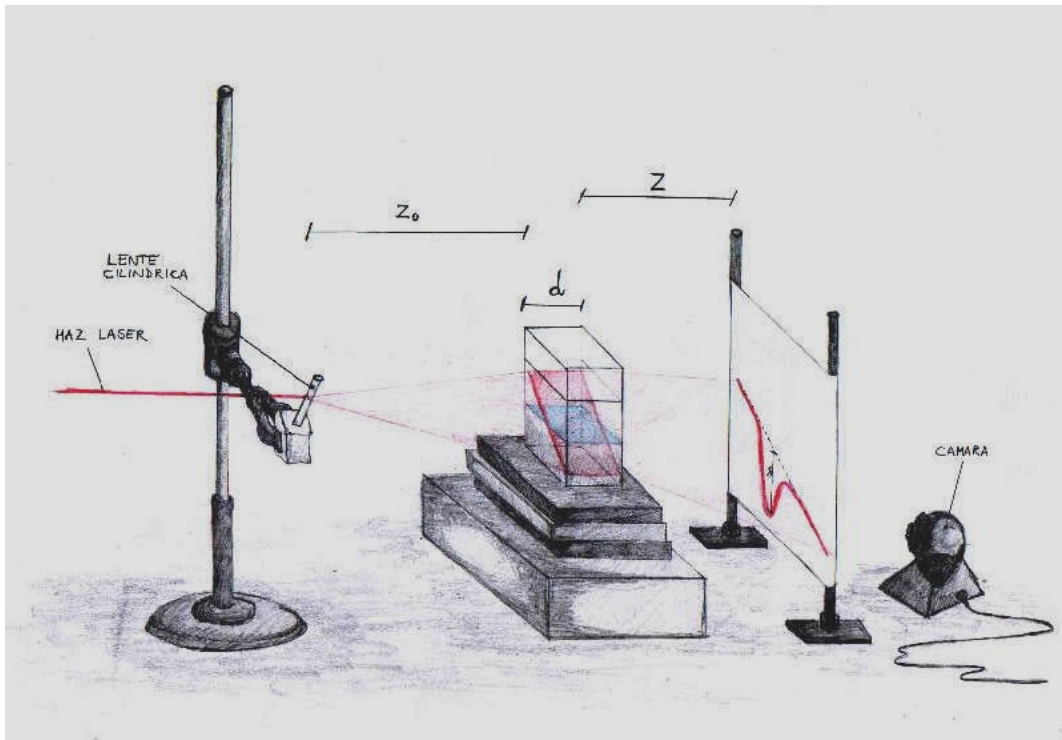


Figura 1. Dispositivo experimental.

vertical dentro del recipiente y no de la horizontal.

Todas las mediciones que realizamos fueron hechas con agua y soluciones acuosas. Utilizamos como solutos azúcar, sal, glicerina y tiosulfato de sodio. Las mediciones más completas fueron realizadas con tiosulfato de sodio, mientras que con los otros solutos realizamos mediciones de prueba para estimar un comportamiento general del dispositivo. En este trabajo solamente discutiremos los resultados obtenidos con el tiosulfato.

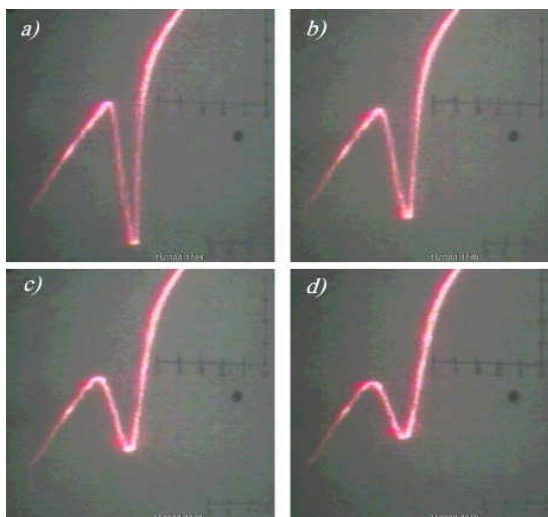


Figura 2. Patrones del haz sobre la pantalla a distintos instantes.

- a) $t = 5$ min después de iniciada la mezcla
- b) $t = 25$ min
- c) $t = 75$ min
- d) $t = 110$ min

Nótese cómo la curva se va haciendo más ancha y menos pronunciada a medida que pasa el tiempo.

Para generar un gradiente de concentración empleamos un procedimiento muy simple que resultó ser muy efectivo. Primero llenábamos el recipiente hasta la mitad con la solución, cuidando que no se mojaran las caras laterales internas del recipiente por encima del nivel de altura que alcanzaría la solución. Luego colocábamos un pequeño pedazo de corcho y sobre él con mucho cuidado vertíamos el agua con una jeringa hipodérmica (sin la aguja). De esta forma, al caer sobre el corcho, la caída del agua generaba poca turbulencia y esta última casi no se mezclaba con la solución. Una vez finalizado el proceso, que no demoraba más de diez minutos, teníamos el recipiente con la mitad inferior con solución y la superior con agua pura, habiendo así logrado una interfase (levemente visible a simple vista) donde la concentración variaba abruptamente.

III. Medición experimental del gradiente de índice de refracción

En principio puede no ser evidente por qué la deflexión de los rayos se debe al gradiente del índice de refracción y no a su valor numérico. El concepto físico involucrado puede entenderse intuitivamente si nos remitimos a la ley de Snell⁸. En nuestro dispositivo tenemos un gradiente vertical de índice de concentración, que en todas las mediciones crecía hacia abajo dado que siempre pusimos la solución abajo y el agua inicialmente pura arriba por ser la primera más densa. Si pensamos al gradiente continuo como una sucesión discreta de capas horizontales cada una con índice constante, tenemos la situación que se ve en la

siguiente figura.

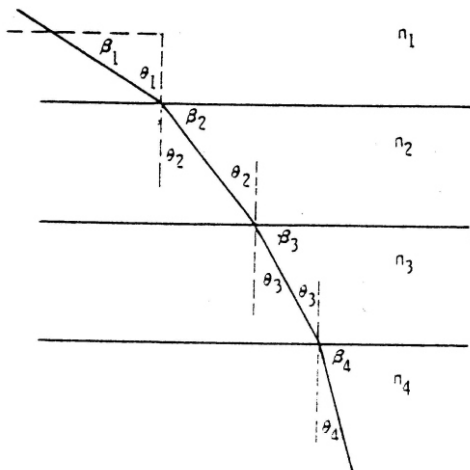


Figura 3. Deflexión de un rayo luminoso en un medio con varias capas de distinto índice de refracción.

Vale aclarar que el ángulo de incidencia θ_1 con el que entra el haz al recipiente es muy pequeño; de hecho uno intenta que incida perpendicularmente al gradiente. En el caso que el haz entrara en el recipiente hacia arriba no sería un problema dado que automáticamente comenzaría a curvarse hacia abajo por el mismo fenómeno, que es en efecto lo que ocurre con los espejismos.

Para empezar es necesario realizar la conexión entre la altura y en el recipiente y la altura en la pantalla.

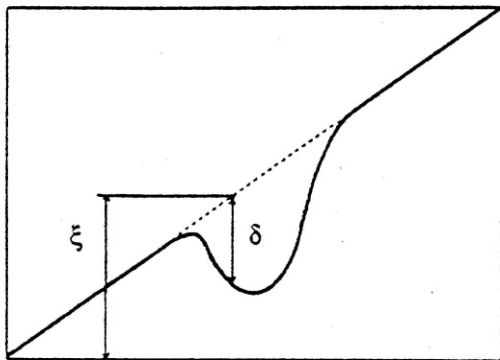


Figura 4. Trazo del haz láser sobre la pantalla. es la deflexión de la curva con respecto a la recta que traza el haz en ausencia de líquido (recta punteada) y ξ es la posición vertical asociada.

Asumiendo que el recipiente tiene un ancho d pequeño (se desprecia el desvío que ocurre en una lámina de caras paralelas) y que los rayos llegan casi perpendiculares, puede deducirse la expresión

$$y = \frac{z_0}{d} \frac{Z_0}{z} \quad (1)$$

Donde, como puede verse en la figura 1, z_0 es la

distancia de la lente al recipiente, d es el ancho del recipiente y z es la distancia del recipiente a la pantalla.

Finalmente, para conectar la deflexión con el gradiente de índice de refracción dn/dy se puede usar una construcción de Huygens.

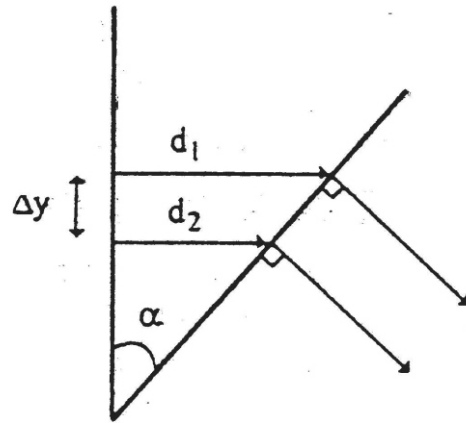


Figura 5. Relación geométrica entre los frentes de onda incidente y refractado.

Tomemos dos rayos que inciden en el recipiente con una separación vertical y y que avanzan horizontalmente en el interior del recipiente durante un tiempo t . El rayo de arriba atraviesa una distancia $d_1 = (c/n)$. t , donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n el índice de refracción correspondiente a esa altura del recipiente. El rayo inferior por su lado ve un índice un poco mayor, por lo tanto viaja una distancia $d_2 = (c/(n + \Delta n))$. t . Como se ve en la figura, una vez transcurrido t el frente de onda habrá cambiado en un ángulo α y al rayo superior le faltará recorrer menos distancia para salir del recipiente, mientras que el inferior sufrirá un mayor número de estas desviaciones infinitesimales antes de salir de la solución. Asumiendo que el ancho del recipiente es pequeño, como ya mencionamos, y que α es pequeño, se puede deducir lo siguiente con trigonometría:

$$\text{tg } \alpha = \frac{c}{n} t - \frac{n}{n + \Delta n} \frac{y}{n} \frac{d \Delta n}{n dy}$$

El rayo sufre una refracción adicional al salir de la solución y pasar al aire, emergiendo con un ángulo de refracción α' . Por lo tanto

$$n \sin \alpha = n_a \sin \alpha' \quad \text{tg } \alpha = \alpha'$$

además como puede verse en la figura del dispositivo, $\text{tg } \alpha = \xi/z$, obteniéndose finalmente que

$$\frac{dn}{dy} = \frac{C}{z} \quad (2)$$

Para construir las curvas experimentales a partir de las imágenes obtenidas con la cámara, utilizamos el programa de análisis de imágenes Scion Image 4.0.2 Beta⁹. Con este software, calibramos las imágenes con una distancia conocida en ellas para así obtener las posiciones x - y en centímetros de los puntos de la imagen y usamos un filtro para eliminar el fondo y quedarnos sólo con la traza del láser; a continuación convertimos la imagen a blanco y negro y con la herramienta de medición obtuvimos los valores de x y y . Las curvas experimentales de dn/dy en función de la distancia se obtienen con las ecuaciones (1) y (2), teniendo en cuenta que $z_0 = (70 \pm 2)$ cm, $d = (6,5 \pm 0,2)$ cm y $z = (60 \pm 2)$ cm.

IV. Modelo teórico del fenómeno

Para ajustar las curvas experimentales, se propone un modelo teórico para la forma funcional de un gradiente de índice de refracción producido por la variación espacial de la concentración de soluto, debida a difusión. El gradiente esperado se escribe como

$$\frac{dn}{dy} = \frac{dn}{dC} \frac{dC}{dy} \quad (3)$$

y lo que se postula es un modelo de difusión por ley de Fick para hallar una expresión para la variación de concentración dC/dy y un modelo de dieléctrico para hallar dn/dC .

La ley de Fick postula que el flujo de partículas que difunden es directamente proporcional a la variación de la concentración por unidad de longitud,

$$D \frac{dC}{dy} \quad (4)$$

donde D es un coeficiente característico de la sustancia, conocido como **coeficiente de difusión** o **difusividad**. D tiene unidades de cm^2/s . El signo negativo indica que el flujo neto ocurre en la dirección en la que C disminuye. Como debe cumplirse la ecuación de continuidad tenemos que, en una dimensión, resolver este problema implica resolver la ecuación diferencial

$$D \frac{d^2C}{dy^2} = \frac{dC}{dt} \quad (5)$$

donde suponemos que la difusividad D es independiente de la concentración (Gaffney y Chau muestran en un apéndice a su trabajo que el error involucrado en tomar esta aproximación es despreciable). Esta ecuación puede resolverse por el método de la transformada de Laplace. Para resolver suponemos que en el tiempo transcurrido en nuestro experimento no se han producido reflexiones de

partículas en los límites del recipiente, por lo que consideramos una aproximación de una columna infinita de fluido en la cual se mueven las partículas. Esto puede verse también en el hecho de que la traza del láser en los extremos superior e inferior de la curva (zonas de solvente puro y de solución pura) casi no se ve afectada -esto es, no se ve desviación de la línea recta- durante el experimento. La solución que se obtiene para la ecuación diferencial es

$$C(y,t) = \frac{C_0}{2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y-h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-s^2} ds \right] \quad (6)$$

donde

$$\int_0^{\frac{y-h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-s^2} ds$$

es la llamada función de error, que es la integral de la distribución gaussiana. Considerando que inicialmente se tiene un pico pronunciado de concentración C_0 , la concentración irá tomando una forma de curva gaussiana que mantiene su área constante pues ésta depende solamente de la diferencia entre los índices de refracción del solvente y de la solución original. Derivando esta expresión con respecto a y obtenemos

$$\frac{dC}{dy} = \frac{C_0}{2\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{y-h}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (7)$$

donde h es la altura inicial de la solución. En nuestro experimento, $C_0 = 11\%$ m/m y $h = 4,5$ cm.

Para obtener una expresión para dn/dC , tenemos en cuenta que el índice de refracción de un medio dieléctrico surge de la polarización o momento dipolar por unidad de volumen

$$\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}$$

suponiendo un material lineal. La velocidad de fase de una onda electromagnética en ese medio es

$$v = \frac{1}{\sqrt{(1 - \chi) \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{n}$$

Combinando estas dos ecuaciones podemos expresar la susceptibilidad del medio como

$$n^2 = 1 + \chi \quad (8)$$

El soluto y el solvente contribuyen distintas susceptibilidades en solución χ_s y χ_f , respectivamente.

$$F \chi_{st} = (1 - F) \chi_{sv} \quad (9)$$

F es el volumen fraccional de soluto en solución, relacionado con la concentración C . Usando (8),

podemos reescribir la ecuación anterior para obtener

$$n^2 = n_f^2 + C(n_s^2 - n_f^2) \quad (10)$$

y derivando esta expresión con respecto a C obtenemos la expresión teórica para dn/dC :

$$\frac{dn}{dC} = \frac{n_s^2 - n_f^2}{2\sqrt{n_f^2 + C(n_s^2 - n_f^2)}} \quad (11)$$

Esta relación puede verificarse experimentalmente (ver Apéndice). En la experiencia realizada, tomamos como valor del índice de refracción del agua $n_f = 1,332 \pm 0,001$, a una temperatura de aproximadamente 26°C^{10} .

Multiplicando (7) y (11) se obtiene la expresión teórica para dn/dy . Esta resulta una curva de tipo gaussiano, con la que se intenta ajustar las curvas experimentales variando el parámetro D .

V. Resultados

En el siguiente gráfico se muestran algunas de las curvas obtenidas experimentalmente, para distintos instantes.

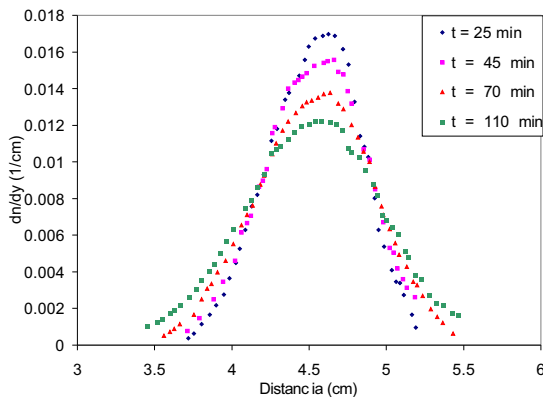


Figura 6. Curvas experimentales obtenidas a los 25, 45, 70 y 110 minutos de comenzada la mezcla.

Utilizando el programa Microcal Origin 6.0, realizamos el ajuste de las curvas con una función de tipo gaussiana como resulta del producto

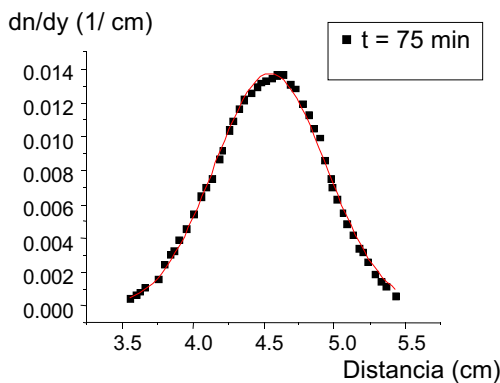


Figura 7. Curva experimental (cuadrados negros) y ajuste teórico (línea roja).

de las ecuaciones (7) y (11). A partir de los parámetros de ajuste, se obtiene el valor de D . La figura 7 muestra un ejemplo de la bondad del ajuste obtenido.

Promediando el resultado obtenido para distintas curvas, el resultado final obtenido para la difusividad del tiosulfato de sodio en solución es

$$D = 7 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s} \pm 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$$

Este resultado coincide, dentro del intervalo de error, con el resultado de $D = 7,5 \times 10^{-6}$ obtenido por Gaffney y Chau. El ajuste de las curvas también muestra que el área de las curvas se mantiene prácticamente constante, obteniéndose el valor

$$A = (13,5 \pm 0,5) \text{ cm}^2$$

lo que confirma la predicción teórica.

VI. Conclusiones

En la experiencia nos fue posible medir el gradiente de índice de refracción de la solución y luego con él averiguar el coeficiente de difusividad del soluto. El resultado obtenido coincide, considerando la incerteza, con el obtenido previamente en otro trabajo. Esta experiencia resulta ser un método experimental sencillo para estudiar el fenómeno de difusión, y resulta de interés pues combina temas de diversas áreas de la física, a saber, teoría de dieléctricos, difusión y óptica, además de un poco de matemática avanzada.

Los resultados obtenidos fueron buenos, sin embargo creemos que se podrían mejorar utilizando un recipiente con un menor ancho para reducir la desviación vertical de los rayos dentro de la solución, acercando más las condiciones experimentales a las aproximaciones empleadas en las cuentas. Notamos además que las paredes del recipiente utilizado no eran exactamente paralelas, sino que tenían una leve inclinación separándose hacia arriba de forma tal que la abertura del recipiente tenía mayor superficie que su base. Esto en principio no afecta el fenómeno dentro de la solución, pero sí produce un ángulo de refracción de entrada y otro de salida que no se consideraron en los cálculos. Otra forma de afinar los resultados sería considerar el espesor de las paredes del recipiente y calcular el desplazamiento que producirían en los rayos al actuar como láminas de caras paralelas.

El agua que utilizamos era agua corriente y no agua destilada, quizás hubiese sido más conveniente usar esta última para evitar que posibles sedimentos del agua corriente se fueran acumulando hacia abajo alterando el índice de refracción de la muestra y su correspondiente gradiente. Podría intentarse la experiencia con agua previamente hervida, con el objeto de eliminar burbujas de aire que podrían modificar los valores de índice de refracción (se observaron burbujas dentro del

recipiente durante la experiencia). Sin embargo, nosotros creemos que para mejorar los resultados sería más importante mejorar los detalles de construcción y alineación del dispositivo.

Para finalizar, mencionamos que a partir del análisis de la difusión puede estimarse el tamaño medio de las partículas que difunden. La relación de Stokes-Einstein indica que una esfera de radio R difundiéndose a través de un fluido de viscosidad tiene un coeficiente de difusión dado por

$$D = \frac{kT}{6 \pi \eta R}$$

donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Así, midiendo el coeficiente de difusión y determinando las otras variables, puede hallarse un radio efectivo para las partículas que difunden.

Apéndice: verificación experimental de la dependencia de la concentración del índice de refracción de la solución

Es de esperar que dado un soluto en una solución transparente, el índice de refracción de dicha solución esté relacionado linealmente con la concentración del soluto. Para obtener esta recta montamos un sencillo dispositivo experimental usando un láser de He-Ne, un recipiente transparente con forma de prisma de base triangular y, por supuesto, solución de tiosulfato de sodio a distintas concentraciones.

Colocamos el prisma sobre una base fija e hicimos incidir el haz láser sobre una de sus puntas de manera que saliera desviado al refractarse. El interior del prisma lo llenamos con solución de concentración conocida; habíamos previamente medido el peso del agua y del soluto empleado en su preparación. A unos 4 o 5 m colocamos una pantalla donde incidía del haz desviado y registramos las posiciones donde caía el haz en desviación mínima y la concentración respectiva de la solución. Con estos datos nos fue posible calcular fácilmente el ángulo de desviación mínima y con él, el índice de refracción del contenido del prisma según

$$n = \frac{\sin \frac{m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

donde α es el ángulo del prisma y m el ángulo de desviación mínima medido¹¹. Los datos obtenidos los ajustamos con la recta de índice de refracción vs concentración dada por la ecuación (10). La correlación es aceptable, lamentablemente no pudimos tomar muchos puntos pues se nos acabó el tiosulfato. Para obtener otra confirmación del método, comparamos la curva teórica con datos obtenidos de tablas, obteniéndose muy buen ajuste en este caso.

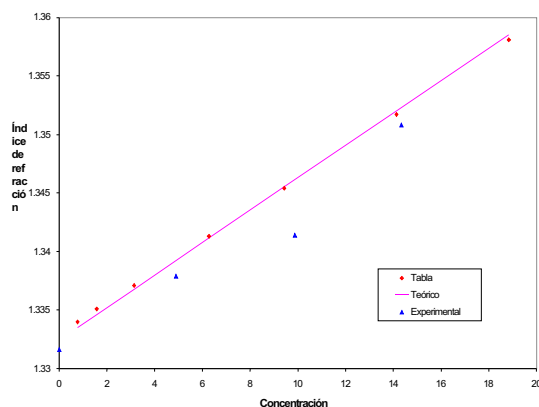


Figura 8. Comparación de los valores de índice de refracción en función de la concentración de la solución acuosa de tiosulfato de sodio. Los valores experimentales se obtuvieron con un prisma hueco, los de tablas se tomaron del Handbook of Chemistry and Physics y la curva teórica corresponde a la ecuación (10).

Este dispositivo surgió de la necesidad de tener un método lo suficientemente sensible como para registrar variaciones del índice de refracción del orden de 0,001. Inicialmente intentamos realizar la medición con un refractómetro de Pfund¹² pero tuvimos que abandonarlo porque al variar la concentración no veíamos absolutamente ningún cambio en el índice.

¹Green, M. "Focusing of light by a vertical temperature gradient in aerated water", Appl. Opt. 17 (1), 1978, 151-156.

²Gabelmann-Grey, L. y Fenichel, H. "Holographic interferometric study of liquid diffusion", Appl. Opt. 18 (3), 1979, 343-345.

³Booth, C., Beer, T. y Penrose, J. D. "Diffusion of salt in tap water", Am. J. Phys. 46 (5), 1978, 525-527.

⁴Gaffney, C. y Chau, C. "Using refractive index gradients to measure diffusivity between liquids", Am. J. Phys. 69 (7), 2001, 821-825.

⁵Barnard, A. J. y Ahlborn, B. "Measurement of refractive index gradients by deflection of a laser beam", Am. J. Phys. 43 (7), 1975, p. 573-574.

⁶Por ejemplo, COREX Ltd., una compañía basada en San Petersburgo, Rusia (<http://on.wplus.net/corex/index.html>), la firma alemana Institut für neue Materialien GmbH, en Saarbrücken (<http://www.inm-gmbh.de>, ver también en http://www.solgel.com/labfoc/inm/grin_e.html) y la multinacional Corning, Inc. (http://www.corning.com/inside_corning/news_media/press_releases/2001/011212_gradientindex_lens.asp)

⁷Brown, R. D. H., Hardy, D., Thomas, B. y Thomas, E. "The effect of variation in refractive index on transmission in fibre optic sensors", J. Phys. E, 19, 1986, 298-301.

⁸Krueger, D. A. "Spatially varying index of

refraction: an open ended undergraduate topic",
Am. J. Phys. 48 (3), 1980, 183-188.

⁹Puede obtenerse gratuitamente del sitio Web de
Scion Corporation, www.scioncorp.com.

¹⁰Weast, R. C. (editor). *Handbook of Chemistry and
Physics (56th ed.)* CRC Press, Cleveland, 1976.

¹¹Sears, F. W. *Óptica*. Aguilar, Madrid, 1967, p. 49-
50.

¹²Una descripción de este sencillo refractómetro
p u e d e e n c o n t r a r s e e n
[http://prancer.physics.louisville.
Edu/optics/manual/node29.html](http://prancer.physics.louisville.edu/optics/manual/node29.html).