

Patrones fractales en una celda de Hele-Shaw

Eduardo Avilés^(a) y Elizabeth Aballay^(b)

Laboratorio de Física III (Curso 2003), Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Favaloro, Av. Belgrano 1723, (1093) C. A. de Buenos Aires.

En este trabajo se estudian los patrones fractales que se forman en una celda de Hele-Shaw cuando un líquido penetra en otro más viscoso. Específicamente, se analiza la dimensión fractal del límite entre los dos líquidos.

Introducción

La celda de Hele-Shaw es un dispositivo que consiste de dos láminas de vidrio, acrílico u otro material rígido transparente, separadas por una pequeña distancia. La lámina superior tiene un pequeño orificio en su centro por donde se introducen los líquidos a estudiar (ver Figura 1). Los patrones que forman dos líquidos en una celda de Hele-Shaw pertenecen a la clase de inestabilidades fáciles de producir experimentalmente, pero muy complejas de estudiar analíticamente.



Figura 1: Celda de Hele-Shaw construida para este trabajo. La celda es de acrílico. Los separadores de papel en cada borde aseguran una separación uniforme entre las placas.

Cuando un fluido es forzado dentro de otro fluido más viscoso, la interfase entre ambos se vuelve inestable y el fluido menos viscoso penetra en el líquido invadido en forma de protuberancias aparentemente irregulares. Estas protuberancias se pueden subdividir repetidamente y en algunos casos forman patrones regulares de cierto tipo, conocidos como

fractales. En la celda de Hele-Shaw, el fluido más viscoso se introduce primero por el orificio de la lámina superior y queda retenido entre ambas láminas. Luego, se introduce el fluido menos viscoso por el mismo orificio. Como resultado se observan patrones complejos, dependiendo estos de las propiedades características de ambos fluidos.

La propiedad característica que más influye en la formación de los patrones que se producen es la viscosidad de los fluidos, más precisamente importa la relación entre las viscosidades de los fluidos. La manera de influir en los patrones es a través de lo que se conoce como “dimensión fractal” de la frontera entre los líquidos (ver Apéndice 1).

En la celda de Hele-Shaw tenemos que el volumen de líquido inyectado se relaciona con la dimensión fractal como sigue:^[1]

$$V = C \cdot b^D \quad (1)$$

donde V es el volumen de fluido más viscoso inyectado, C es una constante de proporcionalidad, b es la separación entre las láminas de la celda de Hele-Shaw y D es la dimensión fractal.

Además, en la celda de Hele-Shaw la viscosidad de un fluido μ y la distancia entre las láminas b se relacionan por medio de la ley de Darcy:^[2]

$$u = -\frac{b^2}{12 \cdot \mu} \nabla p \quad (2)$$

donde u es el campo de velocidades con que se desplaza el fluido y p es la presión de inyección. De las expresiones (1) y (2) podemos observar que existe una relación entre las viscosidades de los fluidos y la dimensión fractal de la frontera entre los dos fluidos. Esta relación es:

$$\mu = -\frac{V^{2/D}}{12 \cdot u \cdot C^{2/D}} \nabla p \quad (3)$$

En la celda de Hele-Shaw también sabemos que $C \gg V$, y que $\Delta p < 0$; luego, tenemos que a mayor diferencia de viscosidades entre los fluidos invadido e invasor, mayor es la dimensión fractal D . En este trabajo experimentamos con una celda de Hele-Shaw y realizamos un análisis cuantitativo de los patrones fractales que se forman cuando se inyectan distintos pares de líquidos.

Procedimientos y resultados

Para analizar el comportamiento de un líquido que penetra en otro de diferente viscosidad, construimos una celda de Hele-Shaw. La celda está formada por dos placas de acrílico superpuestas, de aproximadamente 20 cm de lado y separadas una distancia de (0.3 ± 0.1) mm. Esta separación mínima de las placas se realizó colocando tiritas de papel de igual espesor en los bordes de las placas. En el centro de la placa superior hay un orificio de 3 mm de diámetro por donde se inyectan los distintos líquidos con viscosidades diferenciadas, de modo tal de observar más precisamente la relación de la dimensión fractal del límite entre los dos líquidos. El dispositivo utilizado se muestra en la Figura 1.

Como primer paso realizamos una solución preparada con tinta pigmentada y agua (85.7 %V/V) para utilizarla como líquido invasor de otros líquidos con diferentes viscosidades.

En el experimento 1 el líquido invadido fue glicerina. De esta manera, inyectamos con una jeringa un volumen de (2.5 ± 0.1) ml de glicerina en la celda. El ingreso de la glicerina se realiza contra el aire presente entre las placas, fluido de menor viscosidad que la de la glicerina. En este caso se observa que la frontera glicerina-aire adopta una forma aproximadamente circular. Posteriormente, agregamos con otra jeringa (0.50 ± 0.01) ml de tinta pigmentada. Ahora, la interfase entre los dos líquidos es irregular. La figura irregular que se formó fue fotografiada con una cámara fotográfica digital. Esta imagen se muestra en la Figura 2.



Figura 2: Fotografía del experimento 1. El líquido más externo es glicerina y el interno es tinta pigmentada.

Para analizar la imagen utilizamos un filtro digital del programa Photoshop para extraer el contorno de la imagen irregular fotografiada (la frontera entre los dos líquidos). La nueva imagen lograda se observa en la figura 3. Este filtro se aplicó porque al tomar las fotografías aparecen reflexiones de la luz sobre la placa de acrílico y sombras de los líquidos sobre la placa inferior de la celda. Esto se observa muy bien en la figura 2.

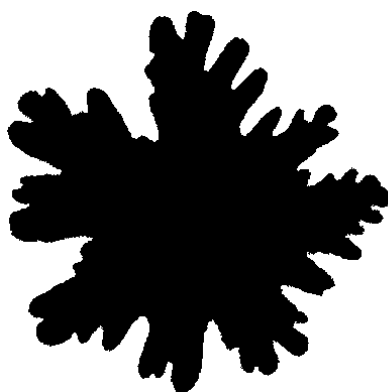


Figura 2: Imagen de la figura 2 filtrada digitalmente para definir el contorno.

Para hallar la dimensión fractal del contorno de las imágenes tomadas, utilizamos el programa *Fractal Dimension* 1.1, creado por docentes y alumnos de la Universidad Bar Ilan.^[3] El programa permite analizar distintas muestras, que dependen del tamaño y de la cantidad de cajas cuadradas que contornean el perímetro de la imagen a analizar. Este procedimiento se explica con más detalle en el Apéndice 2. De esta manera, a partir de los datos experimentales obtuvimos el gráfico de la figura 4.

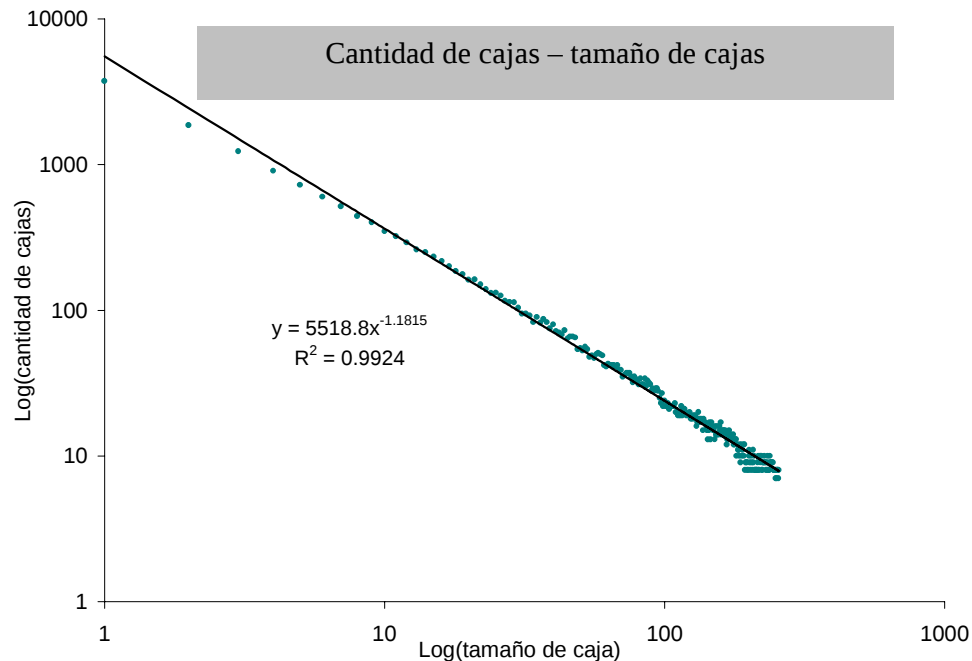


Figura 4: Gráfico del logaritmo de la cantidad de cajas necesarias para cubrir un patrón en función del logaritmo del tamaño de las cajas. Los datos provienen de la imagen de la Figura 3, procesada con el programa Fractal Dimension 1.1.

Al gráfico anterior se le ajustó una línea de tendencia potencial con el método de cuadrados mínimos. De acuerdo al valor del coeficiente de correlación obtenido, podemos decir que el ajuste es aceptable. De esta manera, obtuvimos una función potencial que relaciona a las variables representadas en la figura 4. El exponente de la función potencial es la dimensión fractal de la frontera entre los dos líquidos (ver Apéndice 2).

En el experimento 2 inyectamos primero un volumen de (2.5 ± 0.1) ml de detergente y luego procedimos a inyectar (0.30 ± 0.01) ml de tinta pigmentada. Realizamos el mismo procedimiento de análisis anterior y obtuvimos resultados con una bondad de ajuste comparable.

En el experimento 3, inyectamos (3.0 ± 0.1) ml de aceite de ricino y posteriormente (0.50 ± 0.01) ml de tinta pigmentada, y realizamos los mismos procedimientos de filtrado de imagen y extracción de datos ya descriptos.

Análisis y discusión

	Volumen (l)	C (l)	Dimensión fractal
Detergente	$5 \cdot 10^{-7}$	0.53	1.51
Glicerina	$3 \cdot 10^{-7}$	0.04	1.18
Aceite de Ricino	$5 \cdot 10^{-7}$	0.01	1.04

Tabla 1: Valores obtenidos de las distintas realizaciones de los experimentos

En la tabla 1 se pueden observar los valores de volumen V de líquido inyectado y la dimensión fractal D para cada líquido: glicerina, detergente y aceite de ricino. Se muestran además los valores de la constante C calculados por medio de la ecuación (1).

Como primera observación, podemos notar que el cociente $V/C \ll 1$, con lo cual la hipótesis de $C \gg V$ se cumple para los líquidos analizados. Además, vemos que la dimensión fractal es mayor cuanto mayor es la viscosidad de los líquidos.

Lo anterior no sucede con el aceite de ricino. Esto puede deberse a que la “escala característica” (la medida a la cual ocurren las inestabilidades que forman fronteras fractales) de esa realización del experimento es comparable a la distancia b entre las placas de la celda de Hele-Shaw.

Conclusiones

Se pudo corroborar con la celda de Hele-Shaw que la dimensión fractal de la frontera entre dos líquidos es mayor cuanto mayor es la diferencia de viscosidades de estos. También se observó que las fronteras fractales no se forman en todos los casos, sino que dependen de la escala característica del experimento.

Referencias

1. Kaplan, S. *et al.*, “Hele-Shaw experiment an its relationships with viscosity and density”:
http://www2.ncsu.edu/ncsu/pams/science_house/student/bw/chaos/heleshaw/.
2. Cenicerós, Héctor D., Hou Thomas Y., “The singular perturbation of surface tension in Hele-Shaw flows”, J. Fluid Mech. (próximo a editarse), pág. 4.
3. Información y descargas de Fractal Dimension 1.1: <http://ory.ph.biu.ac.il/SEP/>.
4. Mandelbrot, B. *La geometría fractal de la naturaleza*, 1ª ed., Tusquets Editores, Barcelona, 1997, pág. 15.

Apéndice 1: Fractales

El estudio de los fractales es un capítulo muy reciente de la ciencia. Estos entes fueron sugeridos por el matemático francés Benoit Mandelbrot, cuyo ensayo *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, de 1975, fue un precursor en la materia. La concepción de los fractales, según palabras del mismo Mandelbrot, se desarrolla para: “describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías hechas y derechas [...Los fractales] tienden a ser, también, *escalantes*, es decir su grado de irregularidad y/o fragmentación es idéntico en todas las escalas.”^[4]

Una característica para describir los fractales es su *dimensión*. Más precisamente, esta dimensión se denomina de Hausdorff-Besicovitch, y surge para caracterizar a ciertos objetos para los cuales medir su área, longitud o volumen de forma tradicional es imposible.

Por ejemplo, si queremos medir la longitud de una costa, podemos pensar en tomar un compás con una dada apertura A , e ir trasladándolo a lo largo de la costa. Luego, la longitud de la costa será A por el número de traslaciones realizadas. Esto es la longitud aproximada. Ahora, si la apertura A del compás tiende a cero, es lógico pensar que tendríamos la longitud exacta. Esto no es así, y realizando lo anterior la longitud crece indefinidamente. La causa de esto es la siguiente: si una costa observable en un mapa a escala 1/100.000 se observa nuevamente con un mapa a escala 1/10.000, se hacen visibles subbahías y subpenínsulas. Ahora, si tomamos la misma costa y la observamos en un mapa a

escala 1/10.000 surgirán sub-subbahías y sub-subpenínsulas, y así sucesivamente. Todos estos accidentes contribuyen a aumentar la longitud medida.

Otro método sería medir la costa recorriéndola a no menos de una distancia d del agua, e ir reduciendo esta distancia cada vez más. Pero este método también da un resultado que diverge al tender d a cero.

Lewis F. Richardson estudió experimentalmente la medida de las costas, y se percató de que la longitud de la costa L era proporcional a $F \cdot \epsilon^{1-D}$, donde F es una constante. Este exponente es independiente del método de medición empleado, y se demostró que se corresponde con una dimensión, que es la dimensión fractal. Esta dimensión no tiene porqué ser entera, en el sentido topológico de describir la cantidad de coordenadas espaciales que necesitamos para referirnos a la posición en un objeto.

Apéndice 2: Medida de la dimensión fractal

La medida práctica de la dimensión fractal se basa en el “método de conteo de cajas”. Este método considera que dos cantidades del objeto a medir (el largo, área o volumen por un lado y el grado de precisión en la medida por otro) no cambian de forma arbitraria sino que se relacionan de manera tal que podamos definir la dimensión fractal D .

Para definir D , tomamos en consideración un objeto unidimensional como un segmento rectilíneo de una línea de longitud L . El segmento puede cubrirse con $N(s)$ “cajas” unidimensionales de lado s . Como resultado obtenemos:

$$L = s \cdot N(s) \Rightarrow N(s) = \frac{1}{s} \cdot L \quad (9)$$

De manera similar, para los casos de 2 y 3 dimensiones, se tiene:

$$N(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^2 \cdot L^2 \quad (2 \text{ dimensiones}) \quad (10)$$

$$N(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^3 \cdot L^3 \quad (3 \text{ dimensiones}) \quad (11)$$

Notamos que para objetos regulares el exponente en las fórmulas anteriores es entero. Si la misma regla es usada para objetos fractales, el exponente puede tomar valores no enteros, y es la dimensión fractal por cajas. Generalizando:

$$N(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^D \cdot L^D \quad (12)$$

Tomando el logaritmo de la ecuación (12) se obtiene una definición operacional para la dimensión fractal D :

$$D = \frac{\log(N(s))}{\log(L) + \log\left(\frac{1}{s}\right)} \quad (13)$$

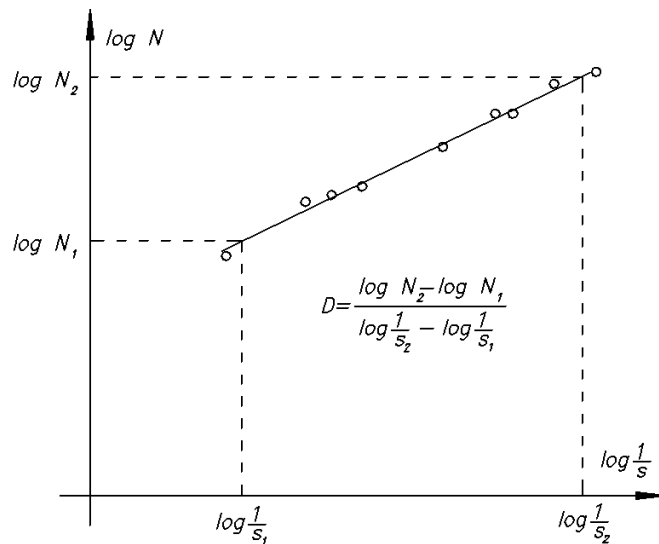


Figura 5: Esquema de un gráfico para determinar la dimensión fractal de un objeto.

En el límite de s tendiendo a cero, el término que contiene L en (13) se vuelve despreciable. Luego, la dimensión por cajas se determina como:

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(N(s))}{\log\left(\frac{1}{s}\right)} \quad (14)$$

En la práctica, para determinar la dimensión fractal de un objeto en estudio (unidimensional, bidimensional o tridimensional), se cubre al objeto con distintas grillas cuadrangulares de dimensiones apropiadas, y cada grilla va cambiando su constante de grilla s . Para cada grilla se cuenta el número de cajas $N(s)$ que cubren o al menos tocan parcialmente el objeto bajo examen. Se grafican los datos tomados en un gráfico de $\log(N(s))$ contra $\log(1/s)$. De esta manera, el gráfico queda linealizado y la dimensión fractal D se obtiene fácilmente como la pendiente de la recta (ver figura 5).

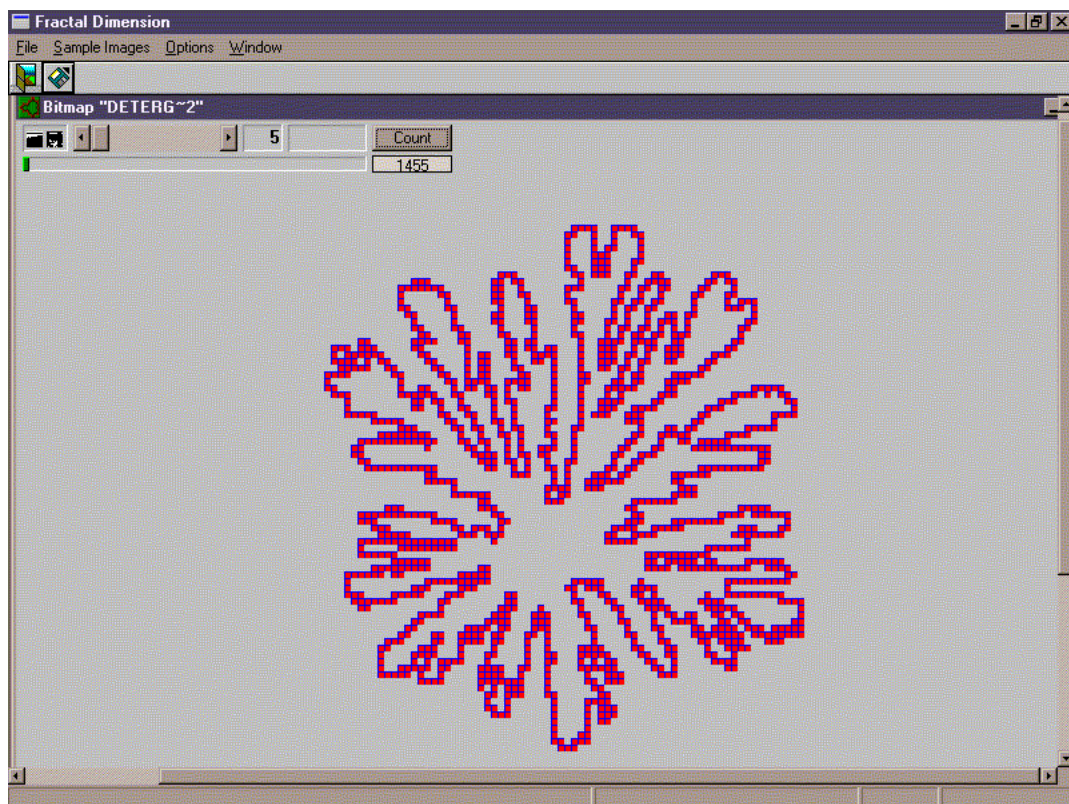


Figura 6: Captura de pantalla del programa Fractal Dimension.

En este trabajo se utilizó el programa *Fractal Dimension* 1.1.^[3] Este programa realiza de forma automática el método descrito anteriormente, con lo que se logra una automatización en el proceso que simplifica mucho el método. En la figura 6 podemos ver una captura de pantalla del programa en acción, con una frontera dada recubierta de cajas de 5 píxeles de lado. La silueta de la figura se puede deducir del delineamiento de la misma por las cajas. Para analizar las prestaciones del programa, se analizó previamente el contorno de un círculo –generado con un programa de graficación– para el que se espera una dimensión fractal $D = 1$, dimensión que el programa pudo discernir.