

ESTUDIO DEL POTENCIAL DE UN PÉNDULO NO LINEAL

Balpardo, Christian

Ferrari, Verónica

Justo, Dalmacio

Laboratorio IV - Dpto. de Física - UBA - 20/10/1998

En este trabajo se realiza un análisis del potencial que afecta a un péndulo físico debido a un campo magnético generado por imanes, así como también de la fuerza de disipación que interviene en este sistema. En particular, se estudió el decaimiento de las oscilaciones para deducir la forma del potencial total que afecta al péndulo. Analizamos también la dependencia del período de las oscilaciones con la energía. Finalmente, a partir de los diagramas de fase del movimiento propusimos distintos modelos matemáticos para modelar el potencial.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las oscilaciones en sistemas no lineales ha tomado mucha importancia en los últimos tiempos. Este campo, en realidad, nos permite hallar soluciones más acordes a lo real que los métodos lineales ya que consiste principalmente en afinar las aproximaciones. En el caso de un péndulo físico, una mera observación cualitativa delata lo limitado que resulta la aproximación lineal, ya que el período no se mantiene constante incluso para amplitudes no demasiado grandes. Es necesario entonces, para ganar precisión, modificar nuestras aproximaciones lo cual nos lleva a un problema dinámico no lineal.

La aplicación de un campo magnético constante cerca del péndulo (estando su punta imantada) también contribuye a la no linealidad del sistema, ya que se introduce así un término de potencial no necesariamente simétrico.

En este trabajo, partimos de observaciones tomadas sobre la posición y la velocidad del péndulo para luego deducir la forma del potencial, y poner en evidencia la no linealidad del sistema.

DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

El sistema consiste en un péndulo solidario a un disco, que por medio de una polea transmite su movimiento a un potenciómetro. El potenciómetro se fijó a una distancia h de la vertical de la polea, por medio de una prolongación del soporte, y, por medio de una banda que lo une a la polea del disco, se mueve con la misma frecuencia con que lo hace el péndulo. Dicho disco está fijo a un soporte de modo tal que tiene libertad de girar sobre un eje que pasa por el centro del mismo. El disco tiene adosada una barra de material ferromagnético, que es el brazo del péndulo, y a cuyo extremo se le coloca uno de los imanes utilizados para generar el potencial no lineal. El soporte posee en su base un dispositivo que consta de un tornillo regulable, del mismo material que el brazo del péndulo, que se ubica en forma lineal con el punto de equilibrio del péndulo sin excitar (es decir en $\theta = 0$) y a una distancia d . Sobre el mismo se coloca el otro imán, igual al anterior pero de manera tal que éstos se repelan. De esta forma, los imanes generan un campo magnético, y se los puede

considerar como monopolos. Asimismo, se conecta el potenciómetro a una interfase, la cual envía la información de los ángulos medidos en función del tiempo a una P.C. (Ver figura nº 1).

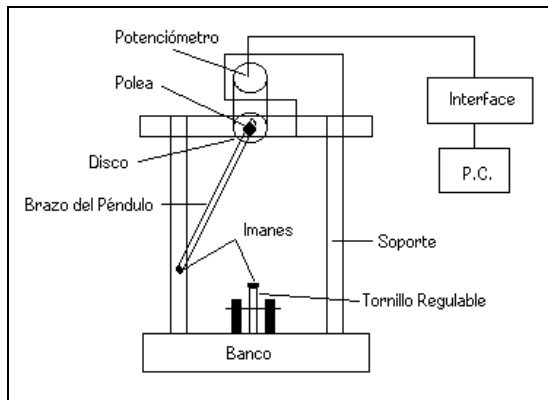


Fig.1 Esquema de montaje

MÉTODO DE MEDICIÓN

Se hizo oscilar el péndulo desde distintas amplitudes, y en primer lugar sin el imán adosado al tornillo regulable. Como ya se mencionó antes, el movimiento del péndulo era transmitido al potenciómetro, el cual se conectaba a una interfase que, asimismo, enviaba los datos recogidos a una P.C. El programa traducía estos datos en tablas y gráficos. Los gráficos que se recogieron representaban al ángulo en función del tiempo (es decir, $\theta(t)$), la velocidad angular (es decir, $w(t)$), los diagramas de fase y el espectro de frecuencias. Además el programa contiene una función por la cual se pueden aproximar las curvas obtenidas (se utiliza para ello, un fiteo tanto automático como manual). Por último, se colocó el segundo imán en el tornillo regulable y se repitió el mismo procedimiento.

Una vez obtenidos los datos, se utilizó un programa auxiliar (Excel) en el cual comparamos los gráficos obtenidos con los gráficos que predice la teoría (del ajuste).

RESULTADOS

A continuación se grafican los resultados obtenidos para el movimiento del péndulo libre (Figs.2) y bajo influencia de un campo magnético constante provocado por el imán (Figs.3) con sus respectivos “fiteos” -exponencial y lineal- y diagramas de fase. De estos obtuvimos una constante relativa al decaimiento que nos sirvió para evaluar el potencial que actúa sobre el péndulo.

En ambos ajustes, se buscó una función del tipo :

$$\theta(t) = A(1 - \gamma.t). \text{sen}(\omega.t + \phi) + B$$

(ajuste lineal)

o bien

$$\theta(t) = A.e^{-\gamma.t} \text{sen}(\omega.t + \phi) + B$$

(ajuste exponencial)

Como resultado obtuvimos :

⇒ Péndulo libre

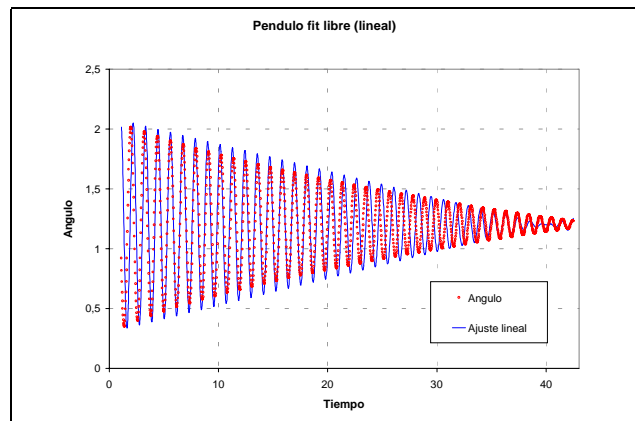


Fig.2a Movimiento del péndulo libre con ajuste lineal del decaimiento.

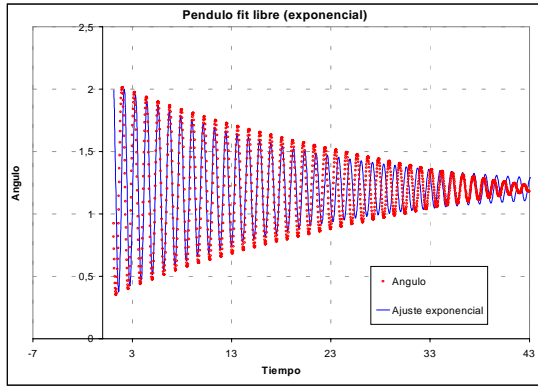


Fig.2b *Movimiento del péndulo libre con ajuste exponencial del decaimiento.*

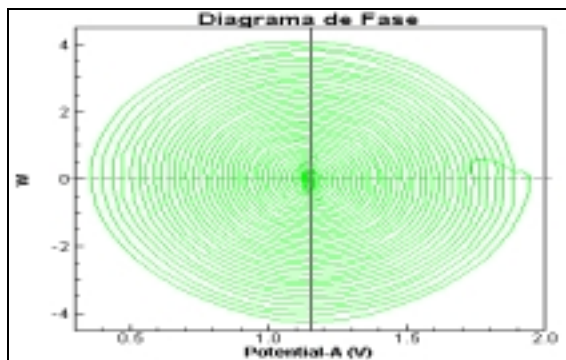


Fig.2c *Diagrama de fase para el péndulo libre.*

⇒ Péndulo bajo campo magnético

En primer lugar, vimos que el decaimiento era independiente del campo, con lo cual nuestro estudio del decaimiento se centrará a partir de ahora sólo en las mediciones con imán (recordemos que queremos estudiar la influencia del campo magnético sobre el péndulo).

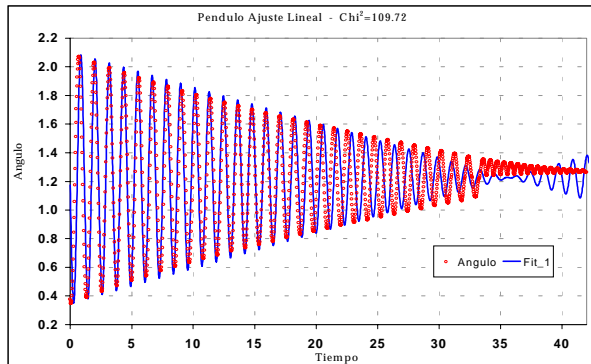


Fig.3a *Movimiento del péndulo bajo campo magnético constante con ajuste lineal del decaimiento.*

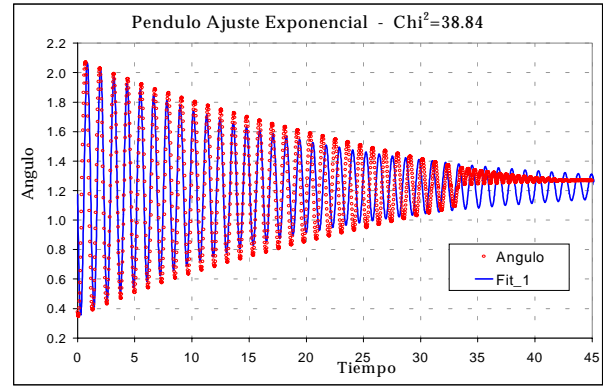


Fig.3b *Movimiento del péndulo bajo campo magnético constante con ajuste exponencial del decaimiento.*

Como se planteó la discusión acerca de cuál de los dos ajustes –exponencial o lineal– para el decaimiento resultaba más acertado, calculamos la dispersión de los datos teóricos respecto de los medidos haciendo uso de la función estadística χ^2 .

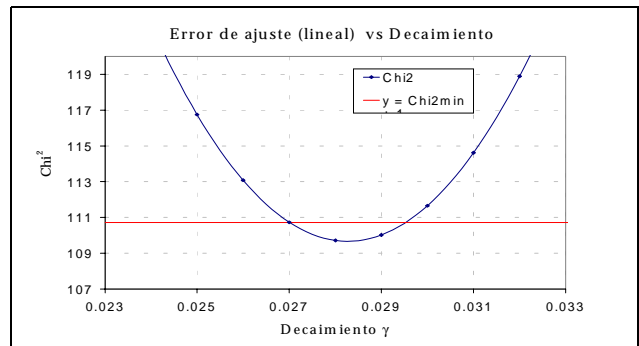


Fig.3c *Error χ^2 en función de γ (ajuste lineal). Determinación del χ^2 mínimo y del error total del decaimiento γ .*

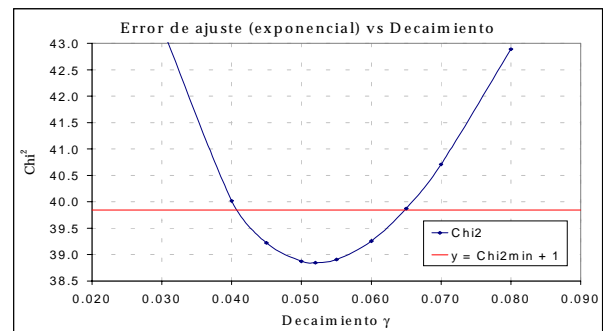


Fig.3d *Error χ^2 en función de γ (ajuste exp.). Determinación del χ^2 mínimo y del error total del decaimiento γ .*

De las figuras 3c y 3d, surge que el ajuste exponencial resultó más acertado –su χ^2 es menor que el del ajuste lineal- aunque una mera observación basta para notar que ninguno de los dos ajustes sobresale por su exactitud (la curva medida tiene una apariencia lineal a trozos, con lo cual siempre aparece una “pancita” de diferencia entre los ajustes y la medición. Además, tampoco la frecuencia del término senoidal es fija en las mediciones, aunque sí lo es la que modelamos, con lo cual en algunas secciones de los gráficos referidos al decaimiento, la curva ajustada está totalmente desfasada con respecto a los datos medidos; la fig.3e muestra que el error que esto genera es sin duda mucho mayor que el provocado por la diferencia de los decaimientos).

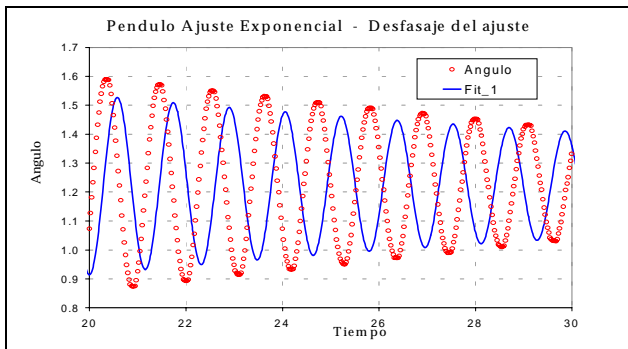


Fig.3e *Decaimiento del péndulo y su ajuste. La curva medida y la ajustada entran en desfase en determinados momentos, influyendo así sobre el error χ^2 total de manera importante.*

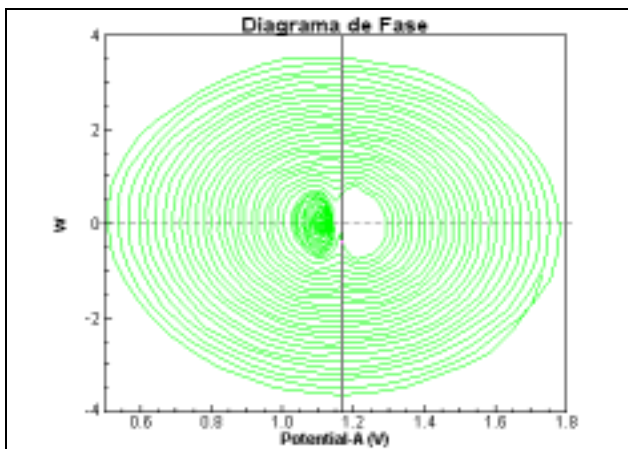


Fig.3f *Diagrama de fase para el péndulo bajo influencia de campo magnético*

La curva de mejor ajuste resultó ser entonces del tipo:

$$\theta(t) = 0.88e^{-\gamma t} \sin(5.42t + 3.2) + 1.225$$

con $\gamma = 0.052 \pm 0.012$

Es importante destacar acá que de todos los parámetros hallados, sólo usaremos en lo que queda del trabajo el parámetro γ , el cual aplicado a la ecuación de la energía, nos permitirá hallar el potencial $V(\theta)$.

CÁLCULO DEL POTENCIAL

La energía total del sistema es la suma de sus energías potencial y cinética :

$$E_T = T + V$$

así que

$$V = E_T - T$$

donde la energía potencial V incluye la contribución gravitatoria y la magnética que desconocemos.

Para un oscilador unidimensional amortiguado⁽¹⁾ con decaimiento γ , la energía total decrece exponencialmente de la manera

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$$

Podemos así graficar el potencial que “siente” el péndulo, el cual quedará dependiente del ángulo θ y del tiempo.

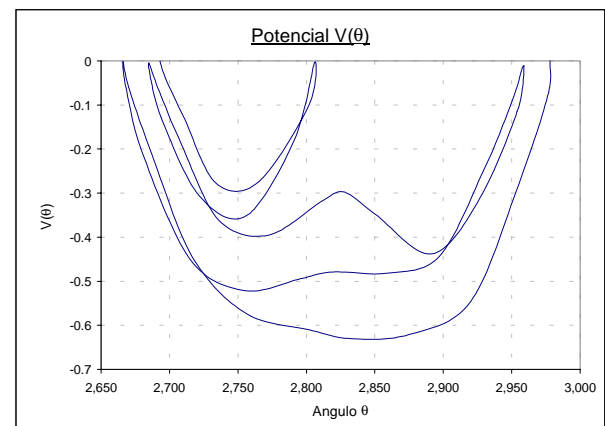


Fig.4 *Potencial V(theta) resultante de los campos gravitatorio y magnético para distintos tiempos*

La parte más baja de la fig.4 corresponde al movimiento del péndulo a gran amplitud : su energía total es bastante grande como para permitirle “cruzar” de un lado a otro del imán. El rozamiento se manifiesta por la asimetría de las curvas, cerrándolas progresivamente (la figura permite apreciar la disminución de la energía total ciclo tras ciclo). También la interacción magnética puede verse por el “achataamiento” progresivo de las curvas más bajas hasta aparecer la barrera de potencial magnética. En efecto, a grandes amplitudes domina el término gravitatorio del potencial, cuya curva es una parábola, y frente a éste, la interacción magnética es imperceptible. A medida que el péndulo pierde energía por fricción, las dos interacciones se vuelven comparables, y el resultado es una combinación de ellos, dando lugar a la forma aplanada de las curvas ya mencionada. Finalmente, la energía del péndulo decae al punto de no permitirle salir del pozo de potencial.

A continuación presentamos (figs.5) las transformadas de Fourier del movimiento del péndulo para distintas zonas de oscilación.

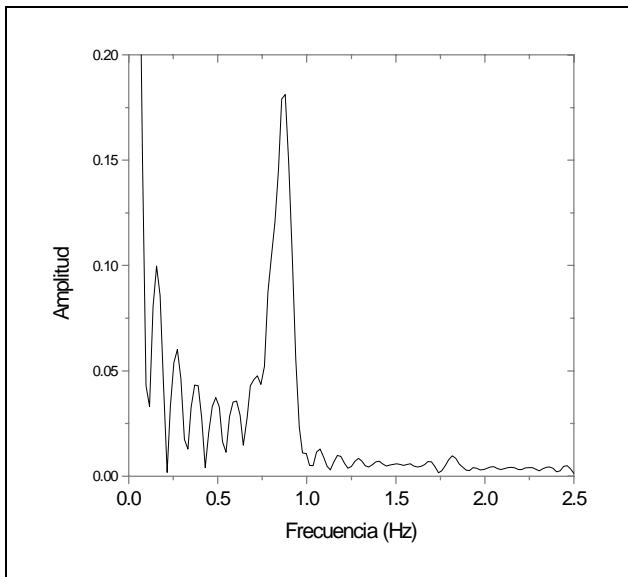


Fig.5a Espectro de frecuencias del péndulo bajo campo constante
Movimiento completo

En la figura anterior aparece una frecuencia dominante con pico en $f_1 = 0.86$ Hz. Este corresponde a la frecuencia natural del péndulo bajo un potencial gravitatorio. Sin embargo, también se observan otros picos relativos a frecuencias más bajas y otros tantos (fig.5c) a frecuencias más altas.

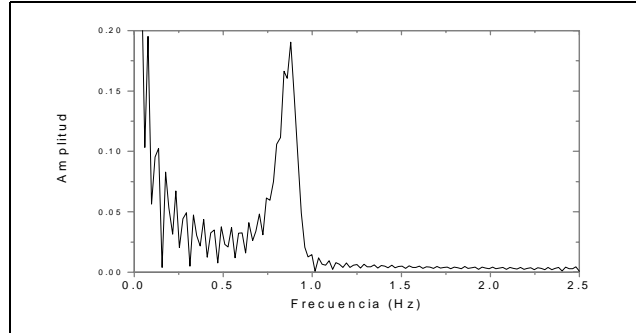


Fig.5b Espectro de frecuencias del péndulo bajo campo constante
Movimiento a gran amplitud (lejos del pozo de potencial)

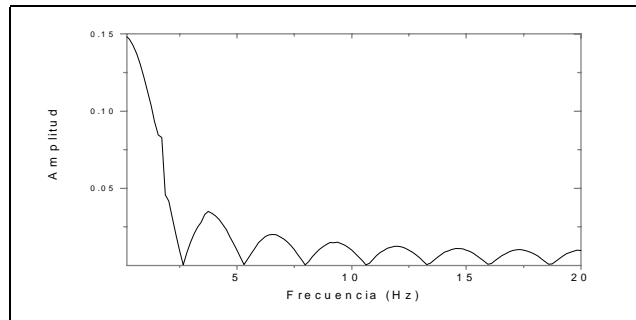


Fig.5c Espectro de frecuencias del péndulo bajo campo constante
Pequeñas oscilaciones (dentro del pozo)

Las frecuencias más bajas se pueden interpretar como perturbaciones a la frecuencia natural debidas al imán mientras el péndulo oscila a ambos lados del pozo -ya que al quedar “atrapado” no aparecen estos picos (fig.5c)-. Una vez dentro del pozo, las oscilaciones se vuelven más regulares, y sólo se ven armónicas de una frecuencia f_2 que no está bien definida (no se ve un pico en esa frecuencia, sino una “meseta” extendida, lo cual indica una multiplicidad de frecuencias en esa región relativamente cercanas entre sí)

pero que se asume muy cercana a la de oscilación natural.

CONCLUSIONES

Vimos en primer lugar que el ajuste exponencial del decaimiento era más acertado que el lineal, ya que minimizaba el error χ^2 . Este nos permitió obtener la forma del decaimiento de la Energía respecto del tiempo, de lo cual deducimos la variación temporal del potencial –incluyendo éste tanto el término gravitatorio como el magnético. Este, como esperábamos, resultó tener la forma de una parábola con una perturbación en el centro debida al imán. Un análisis de Fourier del péndulo permitió identificar las frecuencias que entraban en juego en cada zona del movimiento.

Obtenido el potencial a un tiempo dado, se podría haber hallado la dependencia del período T con la energía, dada la ecuación

$$T(E) = \alpha \int \frac{d\theta}{\sqrt{E - V(\theta)}}$$

Sin embargo, el mejor ajuste del potencial resultó ser un polinomio de grado 6, con lo cual esta integral se tornaba difícil de resolver.

También podríamos haber estudiado el carácter caótico del sistema, forzándolo a través de un electroimán. Esto no se pudo poner en práctica debido a la dificultad de obtener corrientes lo suficientemente grandes en el electroimán como para provocar una perturbación sensible al experimento (tendríamos que haber construido un amplificador).

- (1) Berkeley Physics Course, III Ondas
F.S. Crawford pág.112

REFERENCIAS