

Estudio de leyes de escala para la posición del salto hidráulico circular

HERNÁN D. REISIN* y SEBASTIÁN J. FERRARA**
Laboratorio 5 - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
(Octubre 2004)

El salto hidráulico circular ocurre cuando un jet de líquido impacta perpendicularmente sobre una superficie plana. Luego del choque, el jet se esparce radialmente formando una fina lámina de fluido. A una dada distancia del punto de impacto, la velocidad disminuye abruptamente y se incrementa la altura de la superficie libre. Esta transformación se denomina “salto hidráulico”. La distancia en la cual el salto ocurre fue estudiada como función del caudal para un jet de agua en caída vertical. Los valores obtenidos fueron ajustados a una relación de escala para la posición del salto en función del caudal y de la altura de caída del jet. La ley de escala presentada fue deducida en forma simple aplicando teoremas de conservación de la mecánica del continuo y presentó una correspondencia significativa con los datos experimentales.

I. INTRODUCCIÓN

Un fluido real de viscosidad no-nula sufre esfuerzos tangenciales al estar en contacto con un sólido, o sea que no puede deslizarse libremente sobre el contorno del mismo [1]. Un fluido de baja viscosidad debe entenderse entonces como un fluido para el cual las velocidades variarán fuertemente solamente a una distancia muy corta al sólido en contacto. Puede pensarse entonces en una capa delgada que rodea a los sólidos, denominada capa límite, dentro de la cual no pueden ignorarse los efectos viscosos; y por fuera, el fluido puede considerarse ideal, tal que desliza con esfuerzo tangencial despreciable sobre la capa límite. Sin embargo, esta imagen sólo puede aplicarse para regiones en las que dicha capa permanece realmente delgada (en comparación con las demás longitudes características del problema) y adherida al cuerpo. En muchos casos esta capa delgada crece en espesor, o se desprende del sólido, y por lo tanto la descripción no-viscosa deja de ser válida. El salto hidráulico (SH) es un problema común de este tipo, en el que se supone que la capa límite invade la región ideal.

El SH ocurre cuando un flujo de fluido se frena abruptamente y se incrementa su sección transversal por un aumento en altura de su superficie libre (aproximadamente en un factor 10 [6] respecto de la altura del fluido laminar previo al SH). Esto ocurre debido a que al incrementarse el espesor de la capa límite se crea un flujo reverso cerca del salto (ver figura 1) que produce un punto de separación de la capa límite. Lord Rayleigh fue el primero en intentar hallar una solución de este problema en su teoría de flujo de aguas poco profundas. Desde entonces el número de estudios relacionados creció enormemente (ver una lista detallada de trabajos recientes sobre este tema en [4]) y presenta muchos as-

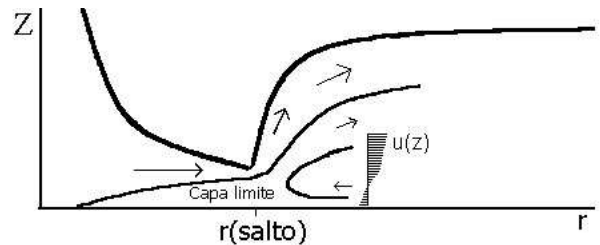


Figura 1: Esquema del salto hidráulico. El jet impacta sobre una superficie plana horizontal y se esparce radialmente. El espesor de la capa límite crece radialmente según el perfil de Blasius. Al alcanzar un espesor del orden la altura del flujo laminar radial, la capa límite se desprende y produce un flujo reverso que incrementa la altura de la superficie libre. Este incremento se denomina salto hidráulico.

pectos de interés que pueden ser investigados en forma experimental y teórica:

- El perfil de la superficie libre en la región del flujo laminar, antes de que ocurra en SH.
- El flujo turbulento en la región del SH.
- El mecanismo que produce el SH.
- La disipación de energía en el SH.
- La ley de escala del radio del SH como función de: la velocidad de impacto del jet (o chorro), el flujo volumétrico del jet, la densidad y la viscosidad del líquido, y las condiciones de contorno dadas por el tamaño y la forma de la superficie de incidencia.
- Las ondas superficiales que se forman en el SH, y su dependencia de la tensión superficial del líquido.

En particular, este trabajo está dedicado al estudio del salto hidráulico de simetría cilíndrica producido por un jet al impactar sobre una superficie plana horizontal.

* Correo electrónico: hreisin@hotmail.com

** Correo electrónico: shaf@fullzero.com.ar

En este caso, el jet se esparce radialmente formando una capa fina (film), y a una dada distancia del sitio de impacto, la altura del líquido se incrementa abruptamente a un valor mayor (figura 1). La posición del salto está principalmente definida por los parámetros que caracterizan al jet, en particular, por su número de Reynolds (Re). En la literatura especializada, se pueden encontrar muchos intentos de derivación para una ley de escala de la posición del SH circular (R) como función de los parámetros del fenómeno. El logro último sería resolver la ecuación de Navier-Stokes para un flujo incompresible para un contorno dado:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{F}_v - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1)$$

Sin embargo, la complejidad de la física involucrada en el SH impide despreciar términos viscosos incluso para números de Reynolds muy altos por lo cual al día de hoy el problema no tiene una solución analítica explícita. Los modelos aplicables se enfocan en la descripción del flujo para la región laminar previa al salto, y formulan condiciones físicas razonables para la predicción del salto [2]. En este trabajo se resolverá el sistema por un método tradicional replicando una deducción simple que aplica argumentos de conservación de la mecánica del continuo. Este modelo resultó dar el mejor ajuste para nuestros datos experimentales, y requiere a la vez de un mínimo de conocimientos de la mecánica de fluidos. En síntesis, se midió la distancia desde el centro del jet a la posición en la cual el ocurre el salto y se intentó ajustar los datos a una ley de escala de la forma:

$$R \sim q^\alpha d^\beta \nu^\gamma \quad (2)$$

donde q es el caudal del jet, d es la distancia de caída libre del jet y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Watson (cf. [6]), por ejemplo, aplicó el modelo de capa límite al análisis del salto. Esta capa comienza en el punto de estancamiento (punto de impacto del jet) y su espesor aumenta con la distancia radial. Asumiendo un perfil de Blasius para la distribución de velocidades de la capa límite, Watson obtuvo una solución en la cual a una cierta distancia $r \geq r_0$ las fuerzas viscosas afectan la superficie libre de modo que todo el fluido es considerado del tipo de capa límite. De acuerdo con este análisis el mezclado de la capa límite y la superficie ocurre para: $\frac{RRe^{-1/3}}{q} = 0,3155$, donde el número de Reynolds es $Re = \frac{q}{\nu a}$, q indica el flujo volumétrico del jet, a es su radio, y ν representa la viscosidad cinemática).

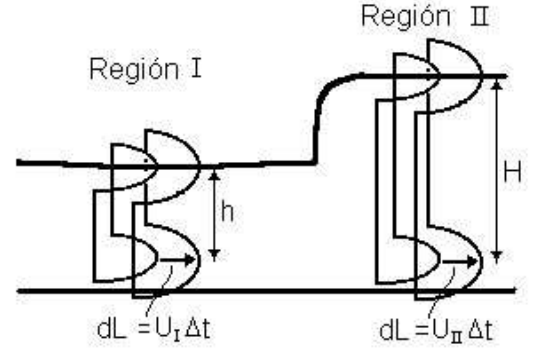


Figura 2: Conservación del flujo másico a través del salto hidráulico. Nótese que el salto se ha asumido sin espesor. La conservación de masa para un fluido incompresible obliga a que la masa de fluido encerrada entre dos cascarones concéntricos que se mueven con el fluido debe conservarse en el tiempo.

II. MODELO TEÓRICO

A. Conservación de masa en la mecánica del continuo

Presentamos primero brevemente la forma de conservación de masa, útil para la deducción posterior. En una aproximación *cuasi-no-viscosa* (ver luego), el fluido fuera del salto puede considerarse netamente ideal. Por lo tanto pueden aplicarse teoremas de conservación no-viscosos para el fluido previo (región I) y posterior (región II) al salto (ver figura 2).

En general, una sección cilíndrica de fluido (de perímetro $2\pi r$ y altura h) en movimiento cambia de posición en un diferencial de tiempo (Δt) barriendo un diferencial de volumen dado por: $dV = h2\pi r u \Delta t$. En la última relación u es la velocidad local del fluido en el anillo de interés como lo indica la figura 2. Por lo tanto, para esta geometría el teorema de conservación del caudal másico a través del SH se escribe como:

$$dm = \rho h 2\pi R U_I \Delta t = \rho H 2\pi R U_{II} \Delta t \quad (3)$$

Donde ρ es la densidad del líquido, h (H) y U_I (U_{II}) son la altura y la velocidad de la lámina de líquido justo antes (después) del salto que ocurre en la posición R .

B. La capa límite

Es necesario ahora incluir la imagen física subyacente acerca del comportamiento de la capa límite. Brevemente, en la aproximación *cuasi-no-viscosa* el movimiento de un fluido de baja viscosidad (agua o aire) alrededor de un cuerpo tiene velocidades del mismo orden de

magnitud que la velocidad lejos del contorno con la excepción de una lámina muy fina localizada alrededor del cuerpo. En esta región envolvente, las fuerzas viscosas (incluso para fluidos de muy baja viscosidad) alcanzan el mismo orden de magnitud que las fuerzas no viscosas (gravitatorias, eléctricas). Por lo tanto el campo se puede partir en dos regiones cualitativamente distintas:

1. La superficie del cuerpo rígido rodeada por una fina capa donde el gradiente de velocidades es muy grande y las fuerzas viscosas no pueden despreciarse (donde $\vec{F}_v \leq \nu \nabla^2 \vec{u}$).
2. La región por fuera de esta capa, donde el gradiente de velocidades no es tan grande de modo que la incidencia de la viscosidad se vuelve despreciable. (donde $\vec{F}_v \geq \nu \nabla^2 \vec{u}$).

Esta capa comienza en el punto de estancamiento (punto de impacto del jet) y su espesor aumenta con la distancia radial como veremos ahora. La fricción interna del fluido causa una resistencia al movimiento que es proporcional al gradiente de la velocidad [5]; existe una fuerza por unidad de superficie o tensor de esfuerzo τ de magnitud: $\vec{F}/\text{area} = \tau = \mu \nabla \vec{u}$, donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido. Para un fluido en movimiento paralelo a un plano se puede aceptar que el mayor gradiente ocurre en la dirección normal al plano (dirección \hat{z}) y tiene un orden de magnitud dado por la variación: $\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{u}{\delta}$. Por lo tanto, el balance de momento lineal ($dF = \frac{d}{dt} \{(dm)u\}$) se puede escribir utilizando la conservación de masa (ecuación (3)) y la definición del tensor de esfuerzos como:

$$\mu \frac{u}{\delta} R 2\pi R = \rho \delta 2\pi R u^2$$

Este modelo debido a Blasius indica que el espesor (δ) de la capa límite tiene un perfil parabólico que está dado aproximadamente por:

$$\delta(r) = \sqrt{\frac{\nu r}{U(r)}} \quad (4)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática del fluido.

Ahora es posible presentar la hipótesis fundamental del SH. La aproximación propuesta por Godwin (cf. [4]) se basa en el rol de la capa límite viscosa. Éste conjeturó que: *el SH ocurre cuando la capa límite alcanza la altura total del film de fluido laminar, o sea:*

$$h(R) = \delta(R) = \sqrt{\frac{\nu R}{U_I}} \quad (5)$$

Esta condición está esquematizada en la figura 4.

En la siguiente sección se deduce la posición del salto en función de los parámetros del jet incidente.



Figura 3: Perfil parabólico de velocidades cerca de un contorno plano. Este perfil corresponde al deducido por Blasius para la capa límite. El fluido en contacto con la placa está estrictamente en reposo. A medida que nos alejamos del contorno en la dirección normal, la velocidad tangencial crece hasta que a grandes distancias (comparadas con δ) vemos un fluido ideal externo. El espesor de la capa límite se define (en su forma más simple) como la altura respecto desde el contorno en la cual el fluido alcanza el 99% de la velocidad externa. La longitud de las barras horizontales indica la velocidad local del fluido.

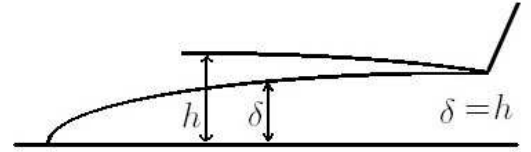


Figura 4: Esquema de la condición de Godwin para el salto. Según esta hipótesis el SH ocurre cuando el espesor de la capa límite δ alcanza a la superficie libre del fluido presalto de altura h .

C. Posición del salto hidráulico

Evaluando la conservación del caudal másico (ecuación (3)) en el punto de impacto para el jet y en la zona I:

$$q = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 U_0 = 2\pi R U_I h, \quad (6)$$

se puede despejar: $R = \frac{q}{2\pi U_I h}$. Incluyendo la condición de Godwin (ecuación (5)) en esta última relación y despejando resulta:

$$R = \frac{q^{2/3} \nu^{-1/3} U_I^{-1/3}}{(2\pi)^{2/3}} \quad (7)$$

En esta experiencia medimos el caudal del jet incidente en dos condiciones distintas. Para cada una de ellas debió deducirse una relación de escala distinta.

Medición con caudalímetro. En este caso se midió directamente el caudal. Bajo la aceptable aproximación que la velocidad justo antes del salto (U_I) sea menor que la velocidad en el punto de impacto (U_0), la conservación del caudal (ecuación (6)) indica que: $U_I \leq U_0 = \frac{4q}{\pi a^2}$. Por lo tanto, el radio del SH está acotado por:

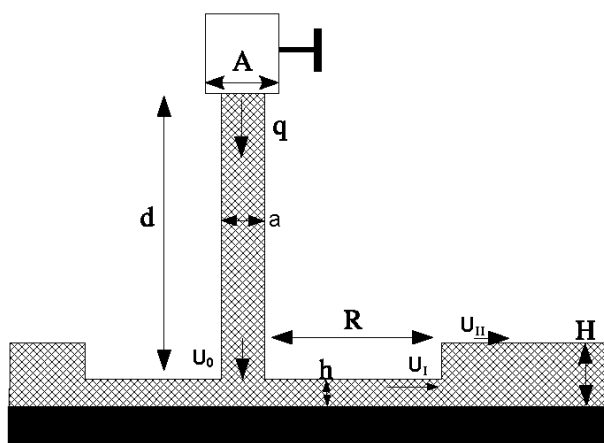


Figura 5: Representación esquemática del salto hidráulico. El jet de diámetro a cae libremente desde una altura d , sobre una placa horizontal plana, formando un film delgado de altura h . En esta región, el fluido se propaga a una velocidad U_I hasta la posición del salto R , donde la altura se incrementa a una altura H y se propaga con una velocidad U_{II} menor.

$$R \geq \left(\frac{a^2}{16\pi\nu} \right)^{1/3} q^{1/3}$$

Medición con el sensor de fuerza. En este caso, la aplicación de la integral de Bernoulli sobre una línea de corriente para un fluido inicialmente en reposo a una altura d sobre la plataforma horizontal indica que este jet tendrá una velocidad en el punto de impacto dada por: $U_0 = \sqrt{2gd}$ (nótese que esta relación es equivalente a considerar la conservación de la energía para una partícula fluida). Olsson y Turkdogan [6] observaron experimentalmente que la velocidad superficial de la región dentro del salto (U_I) permanece esencialmente constante casi hasta la posición del salto y es decididamente menor que la velocidad de caída (U_0) aunque la relación U_I/U_0 tiende a 1 para números de Reynolds grandes. Por lo tanto la velocidad del fluido en la región I resulta ser:

$$U_I \leq U_0 = \sqrt{2gd}$$

Reemplazando esta última ecuación y la condición de Godwin (ecuación (5)) en la ecuación (7) el radio del salto hidráulico resulta ser:

$$R \geq \left(\frac{1}{32\pi^4 g} \right)^{1/6} q^{2/3} d^{-1/6} \nu^{-1/3} \quad (8)$$

Esta inecuación indica una relación de orden para el crecimiento de la posición del SH, y tiene como se buscaba la forma de la ecuación (2).

III. ARREGLO EXPERIMENTAL

En esta experiencia se buscó estudiar la variación del radio del salto hidráulico (SH) en función del flujo volumétrico (caudal) del jet incidente. Por lo tanto, las dos variables involucradas relevantes que debieron medirse son el caudal q y el radio del salto hidráulico R . Para ello, se utilizaron dos arreglos experimentales muy similares cuya única diferencia consistió en el instrumento y el método para medir el caudal. Para el primer arreglo, que se puede apreciar en la figura 6, se conectó un caudalímetro de paletas (QLO-001 LaserOptics) a la canilla de agua corriente y se ubicó el pico de desagote sobre una placa horizontal. Para obtener diferentes caudales simplemente se abrió o cerró la llave de paso de la canilla.

Para el segundo arreglo, que también se puede apreciar en la figura 6, se utilizó una botella plástica cuya base fue cortada para facilitar su llenado. Para generar jets cilíndricos de diferentes caudales se perforaron varias tapas de botella, cada una con un orificio de 2 a 4 mm de diámetro. La botella fue colgada en forma invertida (con el pico apuntando hacia abajo) de un sensor de fuerza conectado a una computadora a través de una interfaz MPLI (Multi purpose laboratory interface, Vernier). El sensor de fuerza fue calibrado para registrar masa utilizando un juego de pesas de masa conocida (las masas fueron pesadas con una balanza electrónica). La curva de calibración junto con el correspondiente ajuste lineal se puede observar en la figura 7.

La computadora registró la masa de la botella llena con agua (M) en función del tiempo. A medida que la botella se vaciaba el sensor registraba una disminución de la masa. Naturalmente, por conservación de masa, el caudal de líquido que escapa de la botella corresponde también a la variación de masa que mide el sensor. Para obtener el caudal a partir de esta medición se calculó la derivada temporal de la masa según:

$$q = \frac{d}{dt} \text{Volumen} = \frac{d}{dt} (M/\rho) \quad (9)$$

donde la densidad del agua se tomó: $\rho = 1$ gramo/cm³ [7].

Independientemente de como se midió el caudal (mediante el caudalímetro o con el sensor de fuerza), el chorro de agua saliente impactó de forma normal sobre una placa de vidrio cuadrado de 30cm de lado. La regularidad o uniformidad de la superficie del vidrio no fue medida pero se asumió ideal (es decir absolutamente plano). El vidrio fue colocado horizontal y nivelado con una burbuja de nivel para evitar posibles deformaciones de la geometría circular del salto. Para no perturbar el salto hidráulico y poder despreocuparse de efectos de borde, el tamaño del recorte de vidrio se eligió tres veces más grande que el mayor radio del SH observado y además

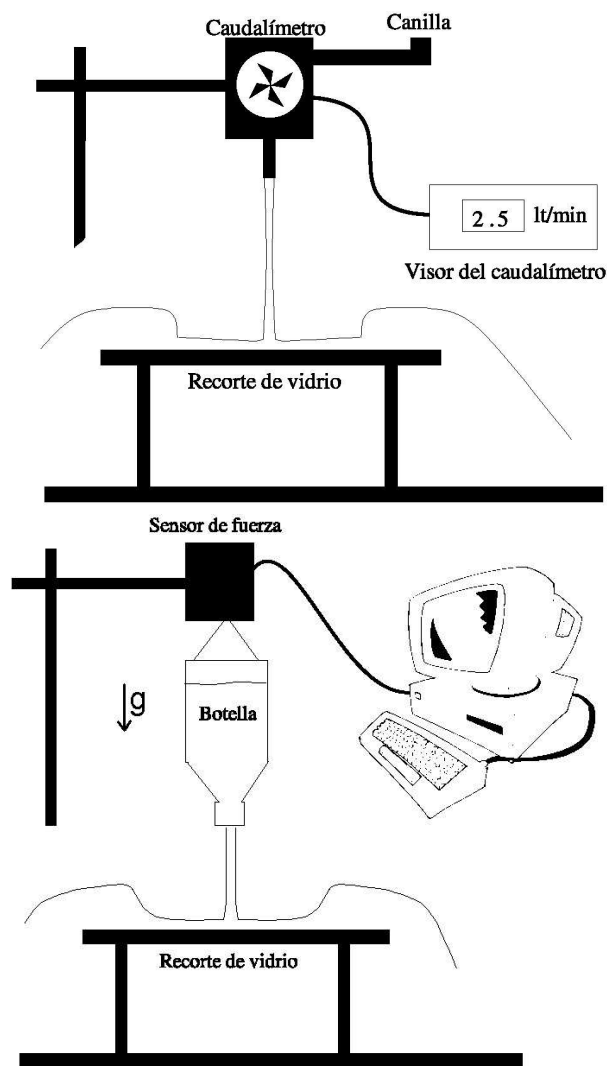


Figura 6: Esquema del arreglo experimental utilizando un caudalímetro (arriba) y el sensor de fuerza conectado a una computadora (abajo) para medir la variación de flujo.

sus bordes fueron esmerilados. Por debajo de la placa (en la cara que no recibe el chorro de agua) se pegó un papel milimetrado, para permitir la medición del radio del salto directamente sobre la placa.

En general, fue necesario reajustar la altura de caída libre (d) del chorro sobre la superficie del vidrio para diferentes caudales para que el borde del salto luciera perfectamente definido y de forma circular. La altura se varió entre 6cm y 25cm aproximadamente. Para alturas muy grandes se encontró que el chorro cilíndrico rompía en gotas discretas como se muestra en la figura 8. En este caso particular, se observaron ondas en la superficie libre del fluido. Claramente, la naturaleza de este flujo discreto deshabilitó el uso de teoremas de conservación del continuo, razón por la cual se decidió eliminar estas

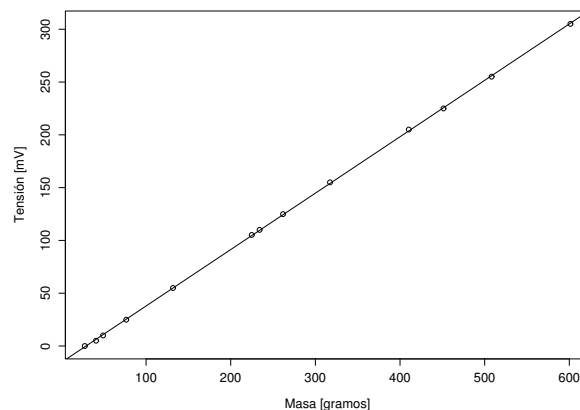


Figura 7: Curva de calibración del sensor de fuerza junto con su correspondiente ajuste lineal ($r^2 = 0,9999$). Las barras de error fueron graficadas pero no se aprecian en el gráfico, pues son del orden de 1 mV para la tensión y de 0,01 gramos para la masa.

mediciones para posteriores análisis.



Figura 8: Fotografía del salto hidráulico irregular. Pueden verse las gotas provenientes del reservorio (botella) y las ondas formadas en el delgado film sobre la placa.

Por otro lado, para caudales muy grandes fue necesario subir la posición del jet para conseguir una buena simetría cilíndrica. Lamentablemente, esto ocasionaba salpicaduras por fuera del flujo laminar, quebrantando

nuevamente la hipótesis de continuidad de masa. Por lo tanto, sólo pudo trabajarse con un rango de caudales acotados tales que: el jet permaneciera continuo (sin gotas discretas) y no produjera salpicaduras. Aún así, para jets ciertamente continuos, el flujo fue en algunos casos, levemente irregular presentando también algunas ondulaciones sobre la superficie dentro del salto como lo muestra la figura 9. Esto es característico de fluidos con baja viscosidad cinemática como el agua ($\nu \approx 0,01\text{cm}^2/\text{s}$). Si se hubiera utilizado un fluido de mayor viscosidad, el término de difusión en la ecuación de Navier-Stokes (ecuación (1)) hubiera cobrado una mayor importancia relativa suavizando la superficie libre.



Figura 9: Fotografía del salto hidráulico con ondas internas. Pueden verse las ondas formadas en el delgado film sobre la placa y un jet continuo.

Se fotografió el SH con una cámara digital de alta resolución (2.1 MegaPixels) para diferentes caudales incidentes. Utilizando el dispositivo experimental que usa el caudalímetro, simultáneamente con cada fotografía se leyó la indicación del caudal en el display del sensor. Este dispositivo permitió medir caudales en el rango de $(8 \sim 60)\text{cm}^3/\text{seg}$. Por otro lado, utilizando el otro dispositivo experimental, se midió la variación de flujo del jet durante el vaciado del contenedor utilizando el sensor de fuerza. En este caso, para poder relacionar el registro del sensor de fuerza con las fotografías, se inició el registro del sensor y al mismo tiempo se encendió un cronómetro de mano. Así, al dejar correr el cronómetro y fotografiarlo junto con el salto hidráulico se pudo conservar el instante preciso de cada medición y tomar el valor de la planilla de datos del sensor en ese mismo tiempo sin

errores por demora (delay). En la figura 10 se puede ver una fotografía de un SH junto con el cronómetro. Con este segundo dispositivo se midieron caudales del orden de $(2 \sim 13)\text{cm}^3/\text{seg}$.



Figura 10: Fotografía del salto hidráulico. Puede verse el pico de la botella en la esquina superior izquierda y el pequeño salto hidráulico circular debajo.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el arreglo experimental que utiliza el sensor de fuerzas y la botella es necesario calcular la derivada temporal de la masa para poder calcular el caudal (ver ecuación (9)). Con este fin se aproximó la derivada por la secante en la medición de la masa en función del tiempo. Para la determinación de la secante se tomó un rango de veinte datos alrededor del punto donde se quiere calcular la derivada y se hizo una regresión lineal de los veinte datos por ajuste de cuadrados mínimos. En la escala temporal estos veinte datos representan un intervalo menor al segundo. Dado que la variación de la masa en función del tiempo (el vaciado de la botella) resultó ser extremadamente “suave” con variaciones significativas para el orden de los 100 segundos, la aproximación por la secante resulta más que adecuada.

En las figuras 11 y 12 se puede observar el radio del salto hidráulico medido sobre la placa de vidrio en función del caudal (q) y del caudal corregido ($q d^{-1/4}$; esta magnitud permitió ajustar las mediciones tomadas para distintas alturas de caída d , ver ecuación (8)) para los experimentos en los que se utilizó el caudalímetro o el sensor de fuerza, respectivamente. El ajuste por cuadrados mínimos utilizando la siguiente relación sugerida por las ecuaciones (8) y (10): $R = A \cdot x^B$ (donde x debe leerse como $x = q$ o $x = q \cdot d^{-1/4}$ según el dispositivo experimental utilizado), resultó para el caudalímetro:

$$B = (0,493 \pm 0,06) \geq 1/3 \quad (10)$$

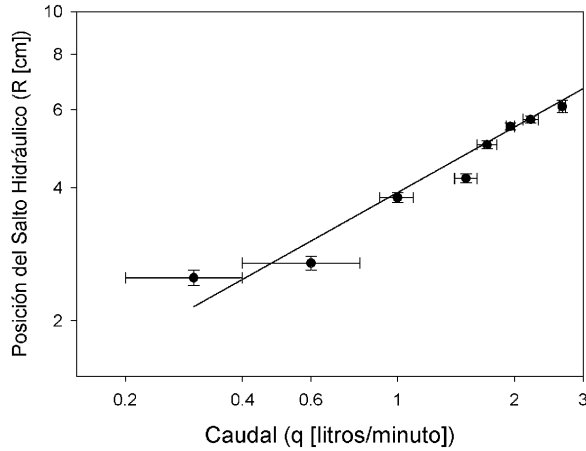


Figura 11: Radio del salto hidráulico en función de $qd^{-\frac{1}{4}}$ en doble escala logarítmica para el sistema de medición del caudalímetro. El ajuste lineal por regresión de cuadrados mínimos presentó un coeficiente de correlación: $r^2 = 0,959$.

Y para el sensor de fuerza:

$$B = (0,710 \pm 0,08) \geq 2/3 \quad (11)$$

Las curvas teóricas correspondientes a la ecuaciones (8) y (10) resultaron estar ubicadas por debajo de las respectivas curvas experimentales (no graficadas). La diferencia no debe asombrar, debido a que las inecuaciones (8) y (10) indican cotas inferiores para el comportamiento del radio como función del caudal. Por lo tanto los resultados experimentales muestran que la cota propuesta opera correctamente en el rango de caudales y alturas de caída libre utilizadas. Es decir: los exponentes (B) obtenidos por la regresión sobre los datos experimentales respetan la relación de orden de las relaciones de escala teóricas. Mas aún, el exponente correspondiente al experimento del jet en caída libre coincide con el obtenido previamente en el estudio de Brechet y Néda [4] ($B = 0,703$) para el mismo diseño experimental.

V. CONCLUSIONES

Hemos presentado un estudio del salto hidráulico circular. Vimos que la superficie libre del flujo antes del salto es delgada y que ésta aumenta luego del SH. Para la deducción de la curva teórica se utilizó como hipótesis que la altura del film laminar se vuelve comparable al espesor de la capa límite en la posición del salto y se desprende creando una corriente adversa que eleva al fluido dando lugar al conocido incremento de altura. Ésta aproximación *cuasi-no-viscosa* provee una relación

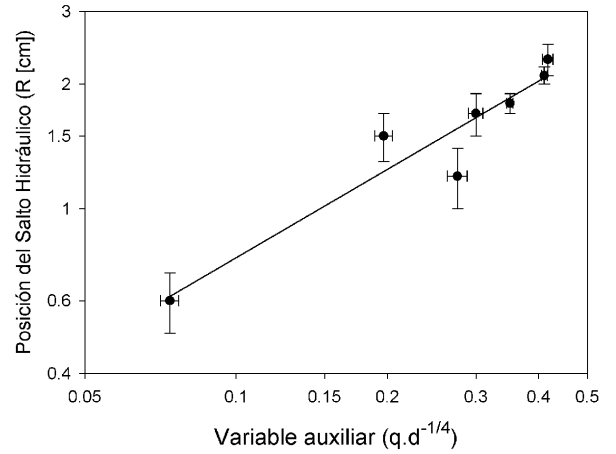


Figura 12: Radio del SH en función del caudal para las mediciones realizadas con el sensor de fuerza ($r^2 = 0,903$).

del radio del salto: $R \sim q^{2/3}$ (jet en caída libre, medición con el sensor de fuerza) o $R \sim q^{1/3}$ (jet medido con caudalímetro) que resultaron ser muy aproximadas al resultado experimental. Sin necesidad de describir la compleja dinámica del salto, donde los efectos viscosos son significativos e interactúan corrientes de pequeñas y grandes velocidades en una región acotada del espacio, se pudo presentar una deducción que requiere mínimos conocimientos de la mecánica de los fluidos pero que a la vez predijo en forma consistente las condiciones experimentales observadas acerca de la posición del SH.

Por otro lado, correcciones que incluyan la geometría del perfil de la superficie libre o efectos de tensión superficial no fueron evaluadas teórica ni experimentalmente. Se sugiere que futuras experiencias eliminen factores de tensión superficial diluyendo un detergente en el fluido utilizado. En forma complementaria, podría estudiarse la dependencia del radio con la viscosidad cinemática: $R \sim \nu^{-1/3}$ (para un caudal constante) trabajando con concentraciones variables de glicerina diluida en agua.

VI. APÉNDICE

Si bien no se midió la altura del SH presentamos esta breve deducción que nos dará una idea de los órdenes de magnitud vinculados en este problema. Con la suposición de flujo *cuasi-no-viscosa* se puede plantear la conservación de la cantidad de movimiento: $dF = \frac{d}{dt} \{(dm)u\}$. Dado que un anillo cilíndrico de fluido soporta solamente un potencial gravitatorio, la fuerza neta sobre el mismo es: $dF = -2\pi R\rho g \int_0^z t dt = -\pi R\rho g z^2$. Aplicando la conservación del momento lineal dos volúmenes de interés en las regiones *I* y *II* resulta:

$$\begin{aligned} -\pi R\rho gh^2 &= \rho 2\pi RhU_I^2 && \text{para la región I} \\ -\pi R\rho gH^2 &= \rho 2\pi RHU_{II}^2 && \text{para la región II} \end{aligned} \quad (12)$$

Restándolas y simplificando factores comunes se obtiene:

$$g(H^2 - h^2) = 2(hU_I^2 - HU_{II}^2) \quad (13)$$

Haciendo la consideración aceptable de que $h \ll H$

(en consistencia con resultados experimentales [2, 6]) la conservación del caudal másico (ecuación (3)) indica que $U_{II} \ll U_I$ y por lo tanto, el balance de fuerzas (ecuación (13)) se reduce a: $gH^2 \sim 2hU_I^2$, que reordenando corresponde a:

$$H \sim \sqrt{\frac{2h}{g}} U_I \quad (14)$$

-
- [1] F.O. Minotti, (2001), *Curso de Estructura 1*, Apunte teórico, Disponible en http://www.lpf.uba.ar/lecture_notes.htm/
- [2] C. Bloom, E. Burns (1997). *The hydraulic jump: Experimental analysis*. Disponible en <http://www.cbloom.com/hydraulic/>.
- [3] R.A. Serway, (1985), *Física*, Nueva editorial Interamericana, Mexico D.F., pp.906-909.
- [4] Y. Brechet, Z. Néda, (1999), *On the circular hydraulic jump*, Am. J. Phys. 67(8):723-731.
- [5] O.G. Tietgen, (1934), *Applied hydro- and aerodynamics*, Dover Publications, NY, USA, pp.58-84.
- [6] R.G. Olsson, E.T. Turkdogan, (1966), *Radial spread of a liquid stream on a horizontal plate*, Nature 211(5051): 813-815.
- [7] <http://physics.nist.gov>