

# Determinación del módulo de Young

Pablo Adrián Nuñez, Gabriela Lohr, Tamara Werhun  
[pablo\\_nuniez2000@yahoo.com.ar](mailto:pablo_nuniez2000@yahoo.com.ar), [la\\_gabuchi@hotmail.com](mailto:la_gabuchi@hotmail.com), [twerhun@yahoo.com.ar](mailto:twerhun@yahoo.com.ar)  
Laboratorio de Física I- Universidad de Gral. San Martín 2005

## Resumen

A través de dos experiencias diferentes (*Modelo estático* y *Modelo dinámico*) se ha determinado el valor del Módulo de Young correspondiente al aluminio y al cobre y se han comparado con valores tabulados. Los valores hallados se ajustan a los modelos estático y dinámico estudiados, arrojando resultados que si bien se hallan dentro de orden de medición distan en un 50% de los valores consultados en tablas.

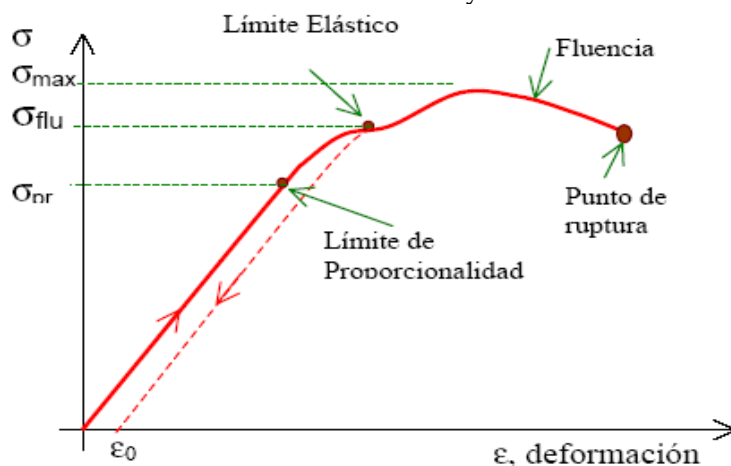
## Introducción:

Si una varilla de longitud  $L_0$  se somete a una tensión, su longitud aumenta en una cantidad  $\Delta L$ . Este cambio de longitud depende tanto de la sustancia de la barra como de la tensión, la longitud  $L_0$  y su área transversal  $A$ .

Para un cierto material se encuentra que si la deformación es elástica:

$$\sigma = Y \cdot \varepsilon \quad (1)$$

Siendo  $\sigma$  el esfuerzo y  $\varepsilon$  la deformación unitaria,  $\frac{\Delta L}{L_0}$ . La constante  $Y$  representa al módulo elástico y depende del tipo de deformación y de la sustancia; siendo así una propiedad intrínseca. Cuando  $\varepsilon$  es menor al 0.5%, se cumple la Ley de Hooke (existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria).



**Fig 1:** En el gráfico se muestra la relación entre el esfuerzo aplicado ( $\sigma$ ) y la deformación unitaria ( $\varepsilon$ ). Cuando  $\varepsilon$  es menor al 0.5% (límite

de proporcionalidad), se cumple la Ley de Hooke y existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria. Cuando se sobrepasa el límite elástico y se suprime el esfuerzo aplicado, el material queda permanentemente deformado. Este hecho se indica por medio de las flechas.

Un módulo elástico se define como:

$$\text{Módulo de Young} = Y = E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2)$$

Cuando la fuerza aplicada es la tensión, el módulo se conoce como Módulo de Young y resulta

$$E = \frac{F}{A} \bigg/ \frac{\Delta L}{L_0} \quad (3)$$

Donde  $F/A$  es el esfuerzo a la tensión.

En particular, al flexionar una barra de sección uniforme, la parte superior sufre una tracción mientras que la inferior se comprime. La línea media no se contrae ni se comprime, por lo que se denomina línea neutra. La flexión que experimenta la barra depende en gran parte del momento areal de su sección transversal.

Si un extremo está soportado por una morsa y en el otro se cuelgan diferentes sobrecargas (*experiencia estática*), la expresión que describe la flexión de la barra es:

$$y(z) = \frac{mg}{2EI_x} \cdot (Lz^2 - \frac{z^3}{3}) \quad (4)$$

Donde  $E$  es el "Módulo de Young" anteriormente mencionado, la letra  $L$  es la longitud de la barra a la cual se le ejerce la fuerza y  $mg$  es el peso de la sobrecarga. El momento areal,  $I_x$ , es el momento de área respecto de la línea neutra y puede calcularse mediante:

$$I_x = \frac{ba^3}{12} \quad (5)$$

donde  $a$  es el espesor y  $b$  es el ancho de la barra.

Para el caso particular en que  $z=L$ , la Ec. (4) queda reducida a:

$$Y_{(z=L)} = \frac{mgL^3}{3EI_x} \quad (6)$$

Si en cambio la flexión es inducida por un ligero impulso que la aparte de la posición de equilibrio (*experiencia dinámica*), la frecuencia de oscilación resulta:

$$f = \frac{0.597^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI_x}{A\rho}} \quad (7)$$

Donde A se refiere al área transversal de la barra y  $\rho$  es la densidad del material. La Ec. (6) surge de resolver la ecuación diferencial que corresponde al movimiento de vibración libre de la barra teniendo en cuenta las condiciones de borde apropiadas ( $y(z=0)=0$ ):

$$\frac{EI}{A\rho} \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

El objetivo es entonces mediante el empleo de estos dos modelos obtener el Módulo de Young (E) para el aluminio y para el cobre y compararlo con los correspondientes valores tabulados.

## I. Método experimental

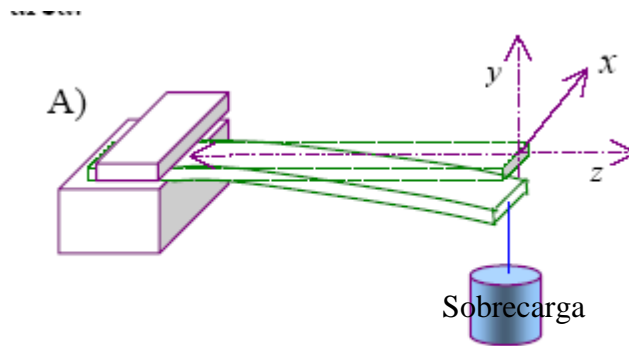
### I.a) Modelo estático

Para el *modelo estático*, se han empleado una barra de sección rectangular soportada con una morsa a una mesa, una regla milimetrada y un juego de pesas calibradas (ver **Fig. 2 a**).

Manteniendo constante la longitud de la barra, se varió una sobrecarga en el extremo libre, cuidando que no genere una deformación permanente, es decir, que no sobrepase el límite elástico. Este procedimiento se repitió para distintas longitudes de la barra.

Con la Ec. (5) se determinó el valor del momento areal ( $I_x$ ) de la barra empleada.

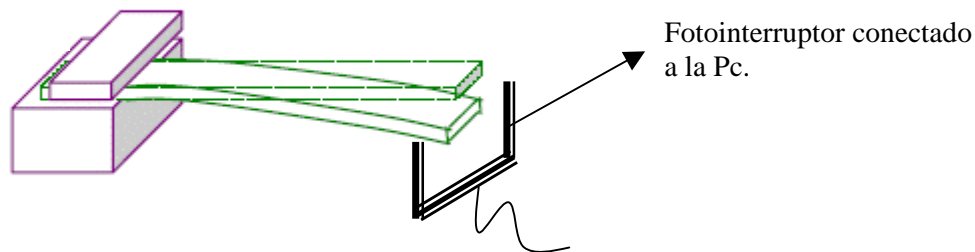
Luego se graficó la flexión  $Y$  en función de  $mgL^3$  y se verificó la relación lineal existente. Así, del valor de la pendiente pudo obtenerse el valor de  $E$  (Módulo de Young).



**Fig. 2a.:** Representación gráfica de la barra de longitud  $L$ , a la cual se le aplica una sobrecarga sobre el extremo libre.

### I.b) Modelo dinámico

En una segunda parte, se trabajó con el *modelo dinámico*, el cual contó con la misma barra de sección rectangular soportada por una morsa, un fotointerruptor conectado a la pc y el programa "Precision Timer" (ver **Fig. 2b**). Se aplicó una ligera fuerza inicial para ponerla a vibrar y se midieron los períodos de oscilación. Empleando la Ec. (7) y graficando  $f$  en función de  $1/L^2$ , se determinó el módulo de Young ( $E$ ).

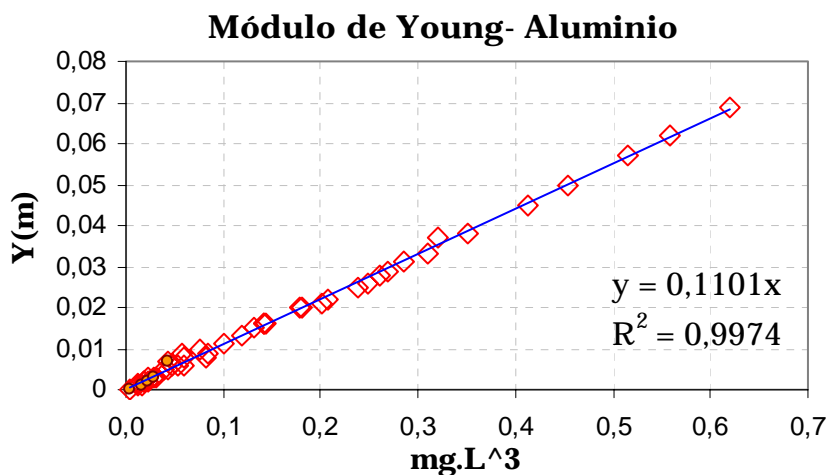


**Fig. 2b.:** Representación del Modelo dinámico. La barra vibra con una frecuencia  $f$ , la cual es captada por el fotointerruptor.

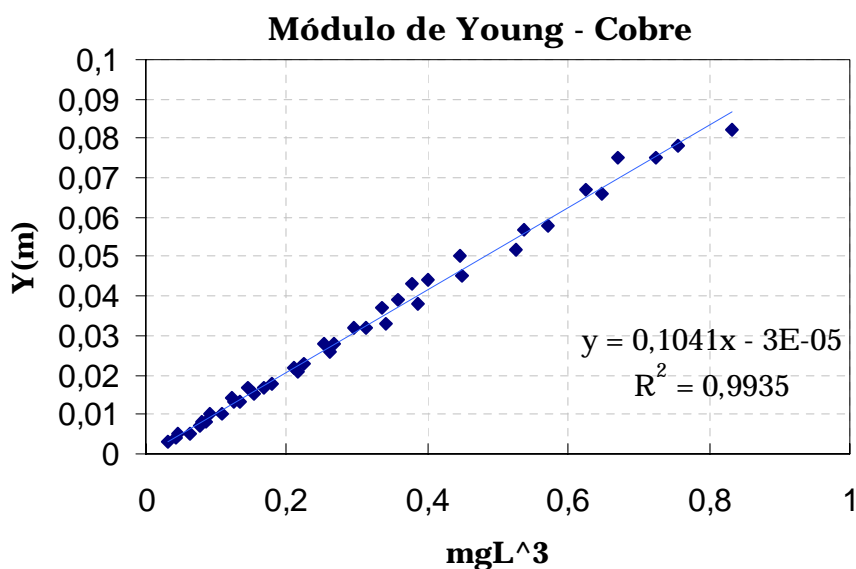
## II. Resultados

### II.a) Modelo estático

En los gráficos siguientes puede apreciarse que se verifica la linealidad expresada en la ecuación (5). A partir de los mismos se obtuvo el módulo de Young correspondiente a cada material.



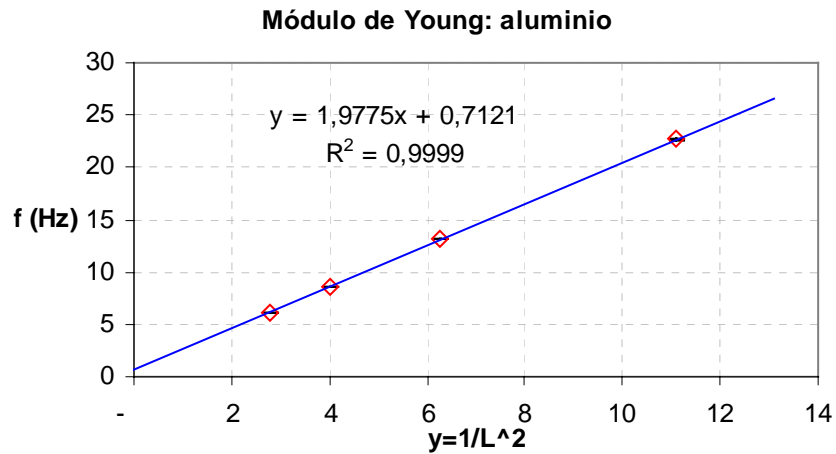
**Fig. 3.** Se verifica la relación lineal entre la flexión **Y** medida en metros y **mgL<sup>3</sup>**. A partir de la pendiente y de la Ec. (5) se obtiene el valor de **E**, el cual es **E= 47,8GPa ± 4,0GPa**.



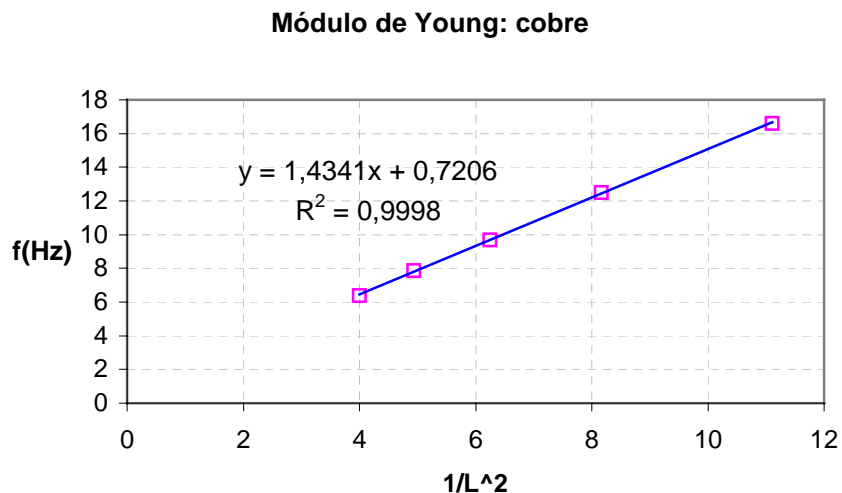
**Fig. 4.** Se verifica la relación lineal entre a flexión **Y** y **mgL<sup>3</sup>**. A partir de la pendiente y de la Ec. (5) se obtiene el valor de **E**, el cual es de **E = 94,1GPa ± 6,0 GPa**.

## II.b) Modelo dinámico

En los gráficos siguientes puede apreciarse que se verifica la linealidad expresada en la ecuación (6). A partir de los mismos se obtuvo el módulo de Young correspondiente a cada material.



**Fig. 5** Este gráfico permite verificar la relación propuesta en la Ec. (6) y obtener mediante su pendiente el valor del módulo de Young para el aluminio el cual resultó de  **$E = 46,4\text{Gpa} \pm 4,0\text{ Gpa}$** .



**Fig. 6.** Análogamente este gráfico permite verificar la relación propuesta en la Ec. (6) y obtener mediante su pendiente el valor del módulo de Young para el cobre el cual resultó de  **$E = 81,0\text{ Gpa} \pm 7,4\text{ Gpa}$** .

### En resumen:

<b>Material</b>	<b>Módulo de Young E (GPa) <i>Modelo Estático</i></b>	<b>Módulo de Young E (GPa) <i>Modelo Dinámico</i></b>
<b>Aluminio</b>	<b>47.8±4.0</b>	<b>46.4±4.0</b>
<b>Cobre</b>	<b>94.1±6.0</b>	<b>81.0±7.4</b>

### III. Discusión

Los resultados de los módulos de Young hallados para el aluminio y el cobre por ambos métodos resultan equivalentes dentro de los intervalos de indeterminación.

Al comparar los resultados obtenidos con los tabulados (ver apéndice) los mismos se encuentran dentro del orden de magnitud pero con diferencias porcentuales apreciables, de alrededor de un 50%.

A pesar de lo mencionado en el punto anterior podemos afirmar que los valores experimentales de ambos métodos se ajustan al modelo teórico propuesto.

El factor de mayor aporte de indeterminación en las mediciones ha sido el valor del espesor de la barra. Dicha magnitud en el valor de  $I_x$  se propaga un 6% y en el del área a un 2% de error, por lo que los valores de E obtenidos arrojan una indeterminación de un 8% a un 10% para los métodos empleados.

### IV. Conclusión:

En esta experiencia no hemos obtenido un valor del módulo de Young acorde al valor tabulado con ninguno de los dos métodos y para ninguno de los dos materiales con que hemos trabajamos. Los valores obtenidos resultaron ser inferiores en un 50% aproximadamente de los valores tabulados.

Sin embargo, resulta llamativo cómo en ambos métodos se evidencia una consistencia en los valores de ambas barras. Es decir, el valor obtenido empleando el método dinámico resultó comparable al obtenido con el método estático.

Quisimos chequear si los valores del módulo de Young obtenidos podrían ser diferentes a los tabulados como consecuencia de que las barras estuvieran compuestas por alguna aleación de aluminio y cobre, respectivamente. Entonces

calculamos la densidad de cada barra y encontramos que el valor de la densidad de la barra de aluminio del laboratorio correspondía con el valor tabulado para el aluminio puro. Los mismos resultados y conclusiones se obtuvieron para la barra de cobre utilizada en la experiencia. Por lo tanto, el hecho de no haber hallado un valor del módulo de Young cercano al valor de tabla no se atribuye a que las barras estuvieran compuestas por una aleación del material supuesto.

También hemos confirmado que el cálculo del valor del módulo de Young determinado mediante el método dinámico, es sensible al espesor de la barra empleada. En consecuencia, resulta sumamente importante trabajar con una barra homogénea y uniforme.

También debe destacarse que existió una deformación de la barra de aluminio previa a las mediciones, debido a que fue sujeta a la mesa, con una morsa, a una longitud de 60cm. Esta deformación resulta del propio peso de la barra. Suponemos que quizás esto no lo hayamos considerado adecuadamente al momento de realizar el análisis de los datos. Suponemos que de haber considerado una longitud menor, los datos hubieran sido más descriptivos. Sería importante también analizar si la deformación previa de la barra podría alterar el resultado final, repitiendo la experiencia con otra barra o bien, contemplando longitudes menores para lo cual deberá mejorarse la precisión en la medición de la deflexión.

Otra observación respecto al análisis de los datos obtenidos es que la Ec (7) empleada para hallar el módulo de Young, surge de resolver la ecuación diferencial (Ec. (8)) que contempla ciertas condiciones de borde. Si bien hemos chequeado que las condiciones sean conforme a lo requerido, suponemos que la Ec (7) es válida en el marco de nuestras experiencias.

Entonces, en conclusión si bien no hemos obtenido valores del módulo de Young similares a los valores tabulados, los modelos propuestos para hallarlo se ajustan a los valores obtenidos, debido a la consistencia existente entre los datos. Debería realizarse un análisis más detallado para determinar en qué fase el modelo está presentando falencias. Sin embargo, como en la experiencia realizada los valores obtenidos resultan ser aproximadamente la mitad de los valores tabulados, proponemos modificar el modelo en un factor de 1,5 y realizar nuevas experiencias con barras de otros materiales para analizar la validez de este nuevo modelo.

## V. Referencias:

- 1, 3.- Obtenido de *Física re-creativa* (Cap. "Introducción a la elasticidad"); S. Gil y E. Rodríguez. Ed. Prentice Hall. Perú, 2001.
- 2.- Obtenido de *Determinación del Módulo de Young*; F. Arrufat, U. Novick, P. Frigerio y G. Sardelli. [www.fisicarecreativa.com.ar](http://www.fisicarecreativa.com.ar)

## VI. Bibliografía:

- Física re-creativa; S. Gil y E. Rodríguez. Ed. Prentice Hall. Buenos Aires, 2001.
- Física 2ªEd. ; J. D. Wilson. Ed. Prentice Hall. México, 1996.
- Física- Tomo I- 4ª Ed.; R. A. Serway. Ed. Mc Graw Hill. México, 1999.

## VII. Apéndice

Valores de Tabla: <sup>3</sup>

Material	Módulo de Young E (Gpa)
Aluminio	70
Cobre	110-120

Valores Experimentales:

Material	Módulo de Young E (GPa) <i>Modelo Estático</i>	Módulo de Young E (GPa) <i>Modelo Dinámico</i>
<b>Aluminio</b>	<b>47.8±4.0</b>	<b>46.4±4.0</b>
<b>Cobre</b>	<b>94.1±6.0</b>	<b>81.0±7.4</b>