

# Péndulo en Plano Inclinado

## Variación del Período en función de “g”

Alejandra Barnfather: [banfa@sion.com](mailto:banfa@sion.com) - Matías Benitez: [matiasbenitez@fibertel.com.ar](mailto:matiasbenitez@fibertel.com.ar) y

Victoria Crawley: [v\\_crawley@hotmail.com](mailto:v_crawley@hotmail.com)

### Resumen

*El fin de este experimento es observar el cambio del período de oscilación de un péndulo a medida que se varía la aceleración de la gravedad, mediante el aumento del ángulo de inclinación del sistema. Para realizar este estudio determinamos el período para un péndulo en un plano inclinado. Concluimos que el período aumenta a medida que la aceleración disminuye. También se observa que los resultados experimentales se asemejan a los teóricos. El sistema utilizado responde tanto a las leyes de un péndulo físico como a uno simple.*

### Introducción

El objetivo de este experimento es estudiar el período de oscilación de un péndulo variando la magnitud de la componente sobre el plano de la aceleración de la gravedad,  $g$  efectivo ( $g_{ef}$ ), a través de la modificación del ángulo de inclinación del mismo.

Obtenidas las muestras, se realizará un análisis gráfico de los resultados y comparar los modelos teóricos para un péndulo simple y uno físico, a modo de ver cuál describe mejor los resultados obtenidos experimentalmente. Finalmente, se observará si el experimento falsea las hipótesis de un movimiento armónico simple (M.A.S) con amplitud pequeña.

### Equipamiento:

- ✓ Fotointerruptor conectado a una computadora
- ✓ Precision Timer
- ✓ Cuatro soportes
- ✓ Medidor de ángulos (Pasco Scientific ME-9495)
- ✓ Disco de madera utilizado como péndulo
- ✓ Dispositivo generador de colchón de aire (construido manualmente) con 2 secadores de pelo (2800 W) en su extremo superior para generar presión de aire.

### Método experimental:

El problema principal fue mantener un péndulo oscilando en un plano inclinado sin fricción. Para ello se diseñó un dispositivo que consiste de una caja de madera con agujeros de 1 mm de diámetro espaciados equidistantemente. En la parte superior de la caja se incorporaron dos bocas de aire para la alimentación del colchón de aire. De esta manera se consigue que el aire salga en forma relativamente homogénea.

Para realizar las mediciones correctas se armó el sistema con precisión de la siguiente manera:

- El dispositivo fue sostenido mediante dos soportes de manera alineada con respecto al piso utilizando el medidor de ángulos, ubicado previamente con el dispositivo perpendicular al piso (en este caso marca 0°). Se ajustó de manera de quedar sumamente fijo.
- En las bocas de aire se colocaron los secadores de pelo.
- Con otro soporte y una nuez se ubicó el fotointerruptor cerca del dispositivo y centrado en el eje de oscilación del péndulo para medir los períodos.



**Figura 1-** Dispositivo armado para las mediciones.

- El péndulo se colocó colgando del centro de la parte superior del dispositivo con un hilo de masa despreciable.
- Se encienden los secadores de pelo para generar el colchón de aire y se hace oscilar el péndulo midiendo el período.
- Se inclina el dispositivo para realizar el experimento con distintos planos de oscilación.

Las mediciones se realizaron variando  $\theta$  desde los 10° hasta 75°, tomándolas cada 5°.

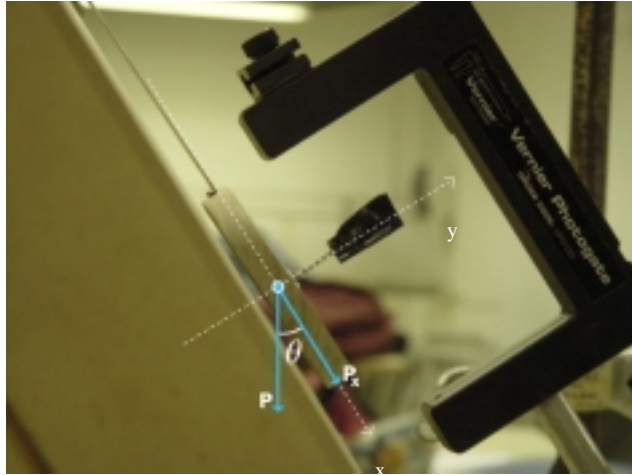
### **Análisis Teórico**

El aspecto teórico principal de este experimento es la variación de  $g$ , donde esta es la proyección sobre el plano de inclinación de  $g$ . Por lo tanto, obtenemos:

$$g_{ef} = g \cdot \cos \theta \quad (1)$$

A continuación se muestra una imagen del dispositivo con un diagrama de cuerpo libre para identificar las fuerzas que actúan sobre el péndulo.

Para calcular el período de un péndulo físico que oscila en un plano inclinado utilizamos los conceptos de rotación de un cuerpo rígido y de movimiento armónico simple. Para el sistema de trabajo, la fuerza restauradora es la componente tangencial de  $P_x$ , la componente sobre el plano del peso ( $P$ ).



**Figura 2-** Péndulo suspendido en un colchón de aire, donde se pueden observar la aceleración de la gravedad y la componente sobre el plano.

Cuando el cuerpo se desplaza, la componente tangencial de  $P_x$  causa un momento de torsión de restitución:

$$\tau = -(m \cdot g)_x \cdot d_{cm} \cdot \text{sen}\beta \Rightarrow \tau = -(m \cdot \cos\theta \cdot g) \cdot d_{cm} \cdot \text{sen}\beta \quad (2)$$

Aquí  $\beta$  representa el ángulo que forma la cuerda que sostiene el peso, respecto de su posición de equilibrio. Como estamos trabajando con un péndulo de amplitudes pequeñas,  $\text{sen}\beta \approx \beta$ . Por lo tanto obtenemos una nueva expresión:

$$\tau = -(m \cdot \cos\theta \cdot g) \cdot d_{cm} \cdot \beta \Rightarrow \tau = -(m \cdot g_{ef}) \cdot d_{cm} \cdot \beta \quad (3)$$

Sabemos que para un cuerpo rígido se cumple una ley análoga a la segunda ley de Newton:

$$\sum \tau = I\alpha \quad (4)$$

Esta expresión indica que la suma de momentos de torsión sobre un cuerpo que está rotando es igual al momento de inercia ( $I$ ) por la aceleración angular ( $\alpha$ ). La aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{d^2\beta}{dt^2} \quad (5)$$

Juntando la ecuación (3) y (5) en la (4) obtenemos:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{(m \cdot g_{ef}) \cdot d_{cm}}{I} \cdot \beta \quad (6)$$

Como la ecuación (6) corresponde a un M.A.S, obtenemos la frecuencia angular y a partir de ésta el período:

$$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g_{ef} \cdot d_{cm}}{I}} \quad (7)$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{(m \cdot g_{ef}) \cdot d_{cm}}} \quad (8)$$

Para calcular el momento de inercia, utilizamos el teorema de los ejes paralelos ya que conocíamos el momento de inercia de un disco con masa no despreciable. Obtuvimos:

$$I_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot (d_{cm} - r)^2 \quad (9)$$

Finalmente, la fórmula para un péndulo físico en un plano inclinado es:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_p}{(m \cdot g_{ef}) \cdot d_{cm}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_{ef}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2r/l + (3/2)(r/l)^2}{1 + r/2l}} \quad (10)$$

$$T \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_{ef}}} \cdot \left(1 + \frac{3r}{4l}\right)$$

## Resultados

En la **Figura 3** se presentan los valores del período obtenidos experimentalmente en función del ángulo de inclinación  $\theta$  junto con los resultados teóricos de la expresión (10) (línea continua). De esta manera podemos comparar los períodos y ver si el método experimental usado simula el modelo teórico.

En la **Figura 4** se presenta el período experimental al cuadrado en función de  $1/\cos\theta$  para verificar si la relación es efectivamente lineal, para esto se trazó una línea de tendencia con su respectivo coeficiente  $R^2$ .

## Discusión

En la **Figura 3** se puede observar la relación entre los valores de la curva para un péndulo simple y uno físico. Se puede observar a simple vista que las curvas son equivalentes. El error es mucho menor comparado al del período, por lo tanto es despreciable. Esto querría decir que nuestro sistema se comporta a su vez como un péndulo simple (esto se cumple para este sistema específico).

Para poder determinar si la **Figura 4** es cualitativamente consistente se llevaron a cabo dos análisis:

1. Tomando en cuenta la pendiente de la recta correspondiente a la **Figura 4**:

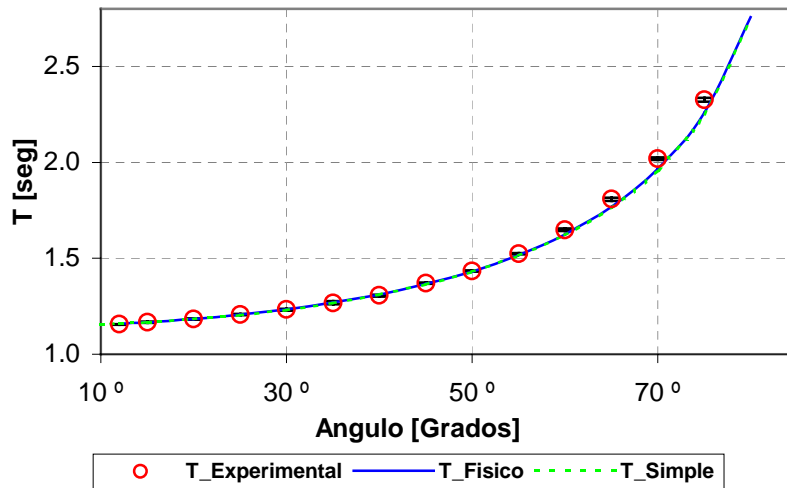
$$\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot I_p}{m \cdot g \cdot d_{cm}} \quad (11)$$

Realizando los cálculos se observó que el resultado de la pendiente fue el mismo que el obtenido a través de la línea de tendencia (que describe los resultados experimentales). Esto confirma que los datos experimentales simulan el sistema teórico.

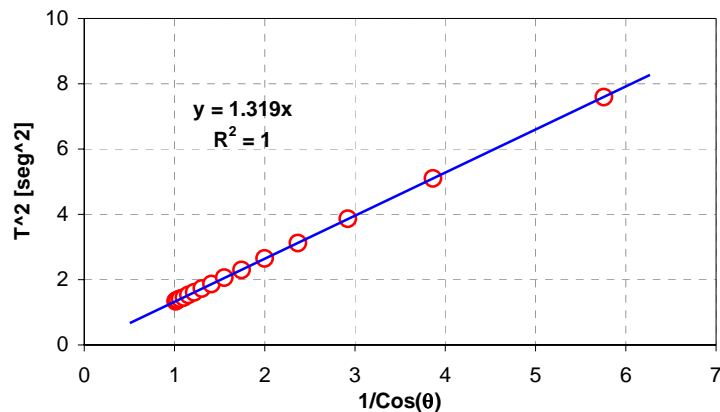
2. Se llevó a cabo un análisis de regresión lineal para estudiar el índice de confianza de los datos experimentales obtenidos. Se observó que la ordenada al origen posee un error que no es significativo para el estudio realizado y por lo tanto puede decirse que ésta es 0 (cero).

Por otro lado, el error de la pendiente es del 0,01% y el error con el que estamos trabajando es del 0,1%. Podemos afirmar que este error tampoco es significativo. Esto argumenta que el método experimental es válido.

Por último se calculó a partir de los datos experimentales, y utilizando la ecuación (11), el valor de  $g$  para estudiar la validez de los resultados.



**Figura 3-** Representación de  $T_{experimental}$  y  $T_{teórico}$ , para un péndulo físico y uno simple, en función de  $\theta$ . Junto con cada dato experimental se presenta su respectivo error, como se puede observar, estos son muy pequeños. También se observa que las curvas de péndulo físico y uno simple son equivalentes.



**Figura 4-** Representación de  $T^2$  respecto de  $1/\cos\theta$  (o) y su respectiva línea de tendencia. Este gráfico es útil para ver si el sistema responde a las leyes del péndulo deducidas para ángulos pequeños. El coeficiente  $R^2$  demuestra que el ajuste es excelente.

## Conclusión

- ✓ El período depende del ángulo de inclinación del plano de oscilación.  $T$  aumenta a medida que  $g_{ef}$  disminuye.
- ✓ El error obtenido de la pendiente en la **Figura 4** es menor al error con el que estuvimos trabajando, por lo tanto el sistema experimental utilizado cumple con el modelo teórico, dado por la ecuación (10) ya que las pendientes (teórica y experimental) son iguales.
- ✓ El método experimental usado es adecuado (ver **Figura 3**) para simular la variación de  $g$ , por lo tanto puede ser útil para realizar estudios donde la aceleración de la gravedad es distinta a la de la tierra.
- ✓ El valor obtenido de la aceleración de la gravedad es  $g = [9,7987 \pm 0,0003] \frac{m}{s^2}$
- ✓ El sistema usado (con amplitudes pequeñas) responde aproximadamente a un M.A.S., ya que cumple con la ecuación (6). Por lo tanto podemos decir que el sistema experimental usado cumple con las leyes teóricas.

## Bibliografía

- Gil, S; Rodríguez, E: *Física Re-Creativa*, Prentice Hall, Perú, 2001.
- FELICIANO, J.: “The Variable Gravity Pendulum”, *Phys. Teach.*, 36, enero, 1998.
- “Variable g pendulum”, [http://newton.hanyang.ac.kr/pds/phywe/1\\_3\\_23.pdf](http://newton.hanyang.ac.kr/pds/phywe/1_3_23.pdf)
- Sears, F., Zemansky, M., Young, H., y Freedman, R: *Física universitaria*, vol. 1, Addison-Wesley Longman, México, 1999.