

Medición del módulo de elasticidad de Young.

Patricia Martínez - Marcelo Azuaga
Laboratorio IV - Dpto. de Física - UBA 1997

Los experimentos descriptos a continuación, fueron utilizados para obtener el módulo de Young de diversos materiales : acero, bronce, hierro, grilón. En el primer experimento se analizaron patrones de difracción obtenidos a partir de la deflexión de una barra voladiza con un peso en un extremo (método estático). En el segundo experimento se analizaron las oscilaciones libres de la misma barra (método dinámico).

I. - FUNDAMENTOS TEORICOS

Se denomina *módulo de elasticidad* a la razón entre el incremento de esfuerzo y el cambio correspondiente a la deformación unitaria. Si el esfuerzo es una tensión o una compresión, el módulo se denomina *módulo de Young* y tiene el mismo valor para una tensión que para una compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda de un valor máximo denominado *límite elástico*. Tanto el módulo de Young como el límite elástico, son naturalmente distintos para las diversas sustancias. El hecho de que la variación de deformación unitaria sea directamente proporcional a la variación de esfuerzo, siempre que no se sobrepase el límite elástico, se conoce como *ley de Hooke*.²

Método Estático :

Si consideramos una superficie cualquiera en el interior de la barra, las partículas que están a cada uno de los lados ejercerán fuerzas sobre las partículas que están del lado opuesto, y estas fuerzas cumplen con el principio de acción y reacción.

De acuerdo a la dirección de esas fuerzas interiores, para cada sección transversal se manifestarán momentos internos, que recibirán su nombre de acuerdo a la dirección de la fuerza. Si la barra se somete a esfuerzos transversales se hablará de momentos flectores ; si se efectúan esfuerzos de corte, se manifestarán momentos de torsión (Ver figura 1)

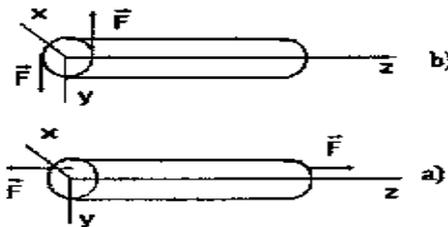


Figura 1 a) Barra sometida a esfuerzos transversales, generando momentos flectores.
b) Barra sometida a esfuerzos de corte, generando momentos torsores.

En nuestro caso, las barras estudiadas fueron sometidas a esfuerzos transversales en un plano vertical, por lo cual trata de una flexión pura (sin torsiones ni fuerzas de corte).

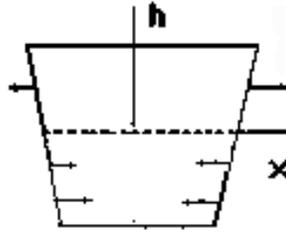


Figura 2 Segmento de la barra seccionada, mostrando los planos del material y su distinta deformación según su posición.

Considerando un segmento de la barra curvada, (Ver figura 2) podemos ver que el material de la parte interna de la barra está comprimido mientras que en la parte externa está estirado; existe una capa central que no se deforma llamada superficie neutra. Las fuerzas que actúan por encima de la superficie neutra tienen sentido opuesto al de las fuerzas que actúan por debajo de dicha superficie; estos pares de fuerzas tienen un momento no nulo respecto de la superficie neutra. Aplicando esto último junto con la ley de Hooke y algunas consideraciones geométricas a una sección transversal de la barra, se obtiene la expresión de la *ecuación de la viga*¹:

$$M = \frac{E}{R}I \quad \text{donde se define} \quad I = \int_A dA h^2 \quad (1)$$

donde **M** es el momento total en toda la sección transversal, **R** es el radio de curvatura de la barra e **I** es el momento seccional de inercia.

En particular, a través de esta ecuación se puede determinar la forma que adquiere la barra cuando se cuelgan pesos de uno de sus extremos, manteniendo el otro fijo.

Sabiendo que el momento de flexión de la barra en una determinada posición **x** a lo largo de la misma está relacionada con la carga que soporta, y a partir de consideraciones geométricas se llega a la siguiente expresión que relaciona el apartamiento vertical de la barra de su posición de equilibrio **y(x)** y las masas **m** colgadas que producen la deflexión¹:

$$y(x) = -\frac{32mg}{\pi d^4 E} \left(Lx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \quad (2)$$

donde **d** es el diámetro de la barra, y **L** es el largo de la barra.

Método dinámico :

La ecuación que rige la evolución espacio- temporal del desplazamiento de una viga está dada por ³ :

$$\frac{\partial^4 s}{\partial x^4} + b \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\rho_1}{I E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

donde el término proporcional a $\partial_t s$ simula los efectos del amortiguamiento. Esta ecuación es de variables separables, por lo tanto, obtendremos una solución temporal $Y(t)$ y una solución espacial $X(x)$. La solución para $Y(t)$ resulta ser una senoidal amortiguada, con amortiguamiento δ y frecuencia ω_k , donde :

$$\omega_k = \sqrt{\omega_{ok}^2 - \delta^2} \quad \text{con} \quad \delta = \frac{IE}{2\rho_1} b \quad \text{y} \quad \omega_{ok}^2 = \frac{IE}{\rho_1} k^4 \quad (4)$$

La solución para $X(x)$ es :

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + C \cosh(kx) + D \sinh(kx) \quad (5)$$

Fijando las condiciones de contorno :

$$X(0) = X'(0) ; X''(L) = X'''(L) = 0 \quad (6)$$

se fijan los valores posibles de k los cuales deben cumplir la ecuación trascendente :

$$\cos(kL) \cosh(kL) + 1 = 0 \quad (7)$$

con $k_1 = 1.875 / L$; $k_2 = 4.694 / L$; etc..

En la práctica, al excitarse solo el modo fundamental de oscilación de las barras, nos quedamos con la primera solución trascendente: $k_1 = 1.875 / L$ ^{1,3} .

II .- ARREGLO EXPERIMENTAL

Método Estático :

El arreglo utilizado en esta parte de la experiencia es el que se ve en la figura 3 :

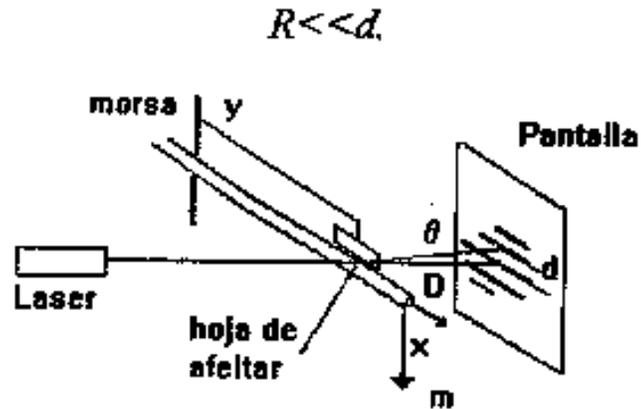


Figura 3 Arreglo experimental utilizado en el método estático para determinar el módulo de Young de distintos materiales. El haz del láser incide sobre la ranura formada por la barra y la hoja de afeitar, formando sobre la pantalla, situada a una distancia **D** de la ranura, un patrón de difracción.

Como se puede observar, la barra se encuentra sujeta por una morsa en uno de sus extremos mientras que su otro extremo se encuentra libre. A una distancia **L** desde la posición de la morsa se van colgando distintas masas que generan una deflexión de la barra. A una distancia **x** desde la morsa se coloca un filo bien definido (hoja de afeitar) por encima de la barra en cuestión determinándose una ranura cuyo ancho nos proponemos medir para cada masa que colguemos en el extremo libre de la barra.

El haz proveniente del Láser de Helio-Neón es dirigido de manera que incida sobre la ranura generándose un patrón de difracción de Fraunhofer sobre una pantalla ubicada a una distancia **D** por detrás de la barra.

Para que las fórmulas desarrolladas en la introducción teórica tengan validez en el arreglo experimental utilizado, debemos tener en cuenta dos limitaciones: la primera es que la deflexión de la barra sea pequeña para ser válida la ley de Hooke, por lo cual se colgaron pesas que no curvaran excesivamente la barra; la segunda es que el ancho de la ranura sea mucho menor que la distancia a la pantalla, para garantizar las hipótesis de la difracción de Fraunhofer.

De acuerdo al patrón de difracción observado en la pantalla, se procede a determinar el ancho de ranura **y** por donde incide el haz proveniente del láser. Para ello, se observa sobre la pantalla la posición de los mínimos de difracción y su orden, aplicándose luego la siguiente expresión para hallar el ancho de ranura **y**:

$$y = \lambda \cdot D \cdot n / d_n \quad (8)$$

donde λ es la longitud de onda del haz proveniente del láser, **D** es la distancia desde la ranura a la pantalla, **n** es el orden de cada mínimo y d_n su posición sobre la pantalla.

A partir de la determinación de **y** para cada masa **m** colgada en el extremo de la barra, se puede obtener el valor del módulo de Young para cada material usado a partir de la ecuación (2), haciendo uso de la relación lineal existente entre ambas variables.

Método dinámico :

En la segunda parte de la experiencia, se mantuvo la barra en la misma posición que en el método estático, pero ahora se registraron las oscilaciones verticales generadas a partir de un apartamiento inicial de su posición de equilibrio. Para ello se contó con un fotodetector que transformó el paso de la barra por delante de la fotocelda en una diferencia de potencial oscilante en el tiempo. Esta señal se recogió en una placa digitalizadora MPLI conectada a una PC, pudiéndosela analizar posteriormente, y así hallar su frecuencia de oscilación f_k y su factor de amortiguamiento δ .

El cálculo de estos parámetros se hizo por medio del software propio de la placa digitalizadora. En el caso de la frecuencia, esta se obtuvo realizándose un análisis de Fourier sobre la señal ; para la determinación del factor de amortiguamiento δ se realizó un ajuste sobre la señal con una forma funcional senoidal amortiguada exponencialmente como sugiere la teoría.

A partir de éstos parámetros, se puede hallar el valor del módulo de Young E y también el valor de b que da cuenta del rozamiento de la barra en su movimiento oscilatorio usando las ecuaciones (4).

III .- RESULTADOS

Método Estático :

Una vez montado el dispositivo de la figura 3, se procedió a alinear el láser para que incida correctamente sobre la ranura cuya abertura queremos medir hasta obtener un patrón bien definido sobre la pantalla. Luego se comenzaron a colgar pesas cerca del extremo libre de la barra, cuidando siempre de suspenderlas a la misma distancia de dicho extremo. Las pesas utilizadas abarcaron desde 0 a 12 gramos para las barras metálicas, y de 0 a 5 gramos para la barra de Grilón.

Para cada pesa suspendida del extremo de la barra, se observó el patrón de difracción en la pantalla anotándose la posición de los mínimos junto con los ordenes correspondientes. En todos los casos, se pudieron observar claramente alrededor de diez ordenes de mínimos de difracción, a partir de los cuales se obtuvo el ancho y de la ranura para cada pesa colgada de acuerdo a la ecuación (8). Para dicho cálculo, se realizó un promedio ponderado de los valores de n/d_n descartándose los dos primeros ordenes por su alto error relativo. También en el cálculo del ancho de la ranura se necesitaron conocer el valor de la longitud de onda del láser la cual se tomó de las especificaciones del propio láser como $\lambda = 6.32 \times 10^{-5}$ cm, y la distancia desde la ranura hasta la pantalla que fue en nuestro caso de $D = (111,2 \pm 0,1)$ cm.

Ya obtenidos los valores de los anchos de ranura correspondientes a las distintas pesas colgadas del extremo de las barras, y siguiendo la ecuación (2) se procedió a graficar la dependencia de y con m , procediéndose a efectuar regresiones lineales sobre dichos datos. Los resultados de estas regresiones se observan en las figuras 4 y 5.

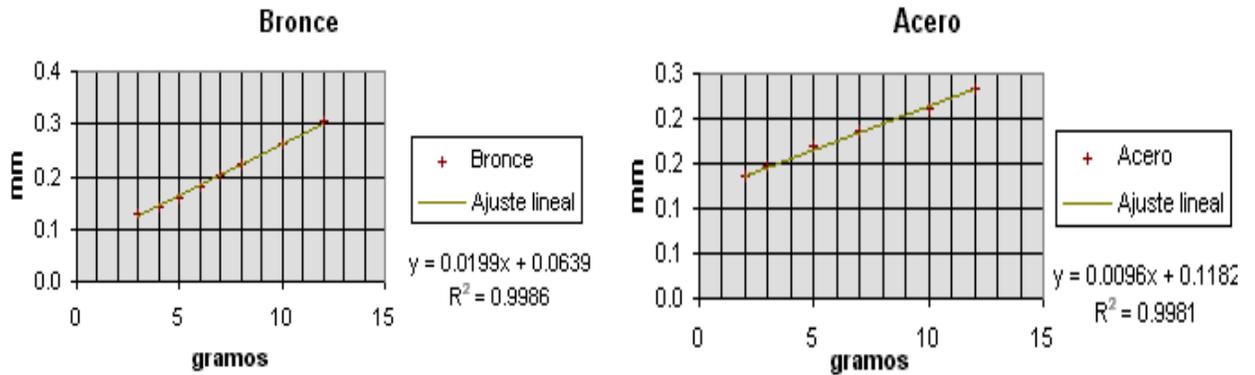


Figura 4 Gráficos de ancho de ranura y versus masas m colgadas de los extremos de las barras de bronce y acero respectivamente. Se observan los resultados de las regresiones lineales hechas sobre los datos.

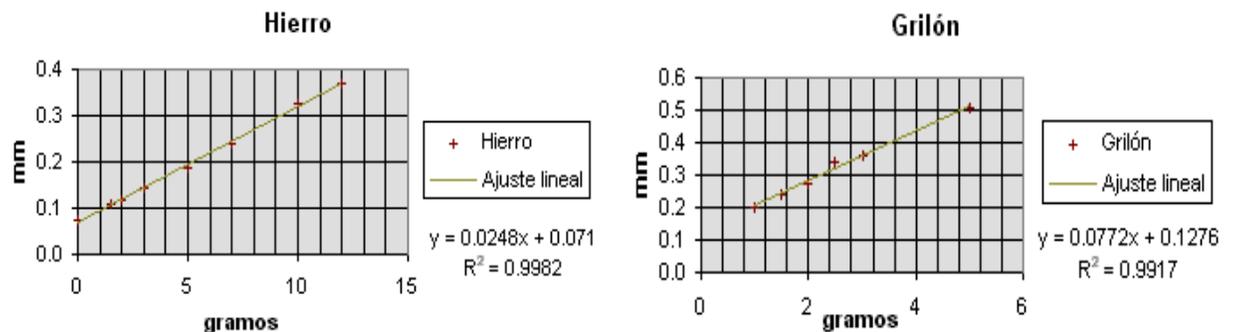


Figura 5 Gráficos de ancho de ranura y versus masas m colgadas de los extremos de las barras de hierro y grilón respectivamente. Se observan los resultados de las regresiones lineales hechas sobre los datos.

Los valores que se obtuvieron para la pendiente a de dichas rectas representan lo siguiente :

$$a = - \frac{32g}{\pi d^4 E} \left(Lx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \quad (9)$$

donde $g = 981\text{cm/s}^2$, y los valores de x , L , d y a para cada barra se encuentran en la siguiente tabla :

Materiales	d (cm)	x (cm)	L (cm)	a (cm/g)
Bronce	$3,91 \pm 0,02$	$10,5 \pm 0,1$	$36,8 \pm 0,1$	$0,00199 \pm 0,00003$
Acero	$3,98 \pm 0,03$	$10,7 \pm 0,1$	$22,9 \pm 0,1$	$0,00096 \pm 0,00002$
Hierro	$3,02 \pm 0,02$	$10,4 \pm 0,1$	$30,9 \pm 0,1$	$0,00248 \pm 0,00004$
Grilón	$8,29 \pm 0,02$	$10,6 \pm 0,1$	$22,7 \pm 0,1$	$0,0077 \pm 0,0004$

Tabla 1 Se observan los valores de los diámetros d de las distintas barras estudiadas, las posiciones L de donde cuelgan las pesas, las distancias x desde la morsa hasta la ubicación de la ranura y los valores de las pendientes a obtenidas a partir de las regresiones lineales hechas en cada caso.

Los valores de los diámetros fueron obtenidos promediando varias lecturas realizadas a lo largo de cada una de las barras, con un calibre cuyo error era de 0,05mm. Para x y L las mediciones se hicieron con una regla cuyo error fue de 1 mm en todos los casos.

Teniendo en cuenta los resultados de la Tabla 1 y la ecuación (9) se procedió a obtener los valores del módulo de Young E para las cuatro barras estudiadas en la experiencia, los cuales se muestran en la Tabla 2 :

Materiales	Módulo de Young E (Pascales)	Error relativo
Bronce	$(7,9 \pm 0,5) \times 10^{10}$	6 %
Acero	$(9,2 \pm 0,7) \times 10^{10}$	8 %
Hierro	$(1,4 \pm 0,1) \times 10^{11}$	7 %
Grilón	$(5,9 \pm 0,5) \times 10^8$	9 %

Tabla 2 Resultados finales para los módulos de Young de las distintas barras estudiadas conjuntamente con los errores calculados por propagación.

Método dinámico :

Habiéndose obtenido numerosas evoluciones temporales de las oscilaciones de las barras, se procedió a seleccionar aquellas que mejor definidas se encontraban. A través del software que acompañaba a la placa digitalizadora MPLI, se realizó un análisis de Transformada de Fourier (ó FFT) para obtener el espectro de frecuencias de la señal obtenida. De dicho análisis se obtuvo en cada caso la frecuencia natural de oscilación de las barras f_k y mediante un ajuste gaussiano sobre la forma del pico de frecuencia presente en el espectro, también se obtuvo la desviación standard que caracteriza a dicho pico, como se aprecia en la figura 6 para el caso particular de la barra de bronce .

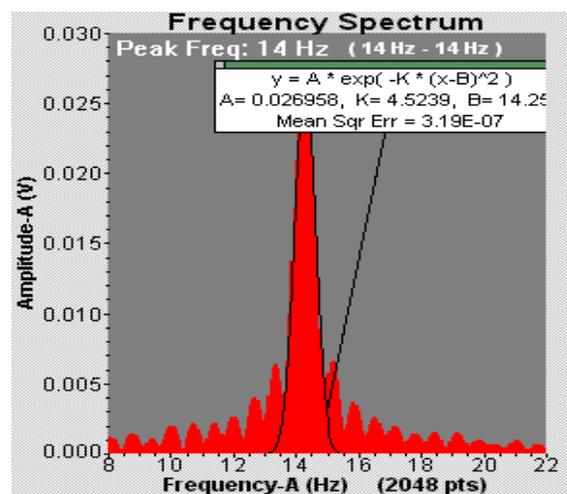


Figura 6 Ampliación del pico de frecuencia f_k mostrando el resultado del ajuste gaussiano hecho sobre dicho pico.

Por otro lado se ajustó la evolución temporal de la oscilación de las barras mediante una forma funcional cosenoidal amortiguada exponencialmente ⁴, obteniéndose el coeficiente δ de amortiguación, como se puede observar en la figura 7 para el caso de la barra de bronce.

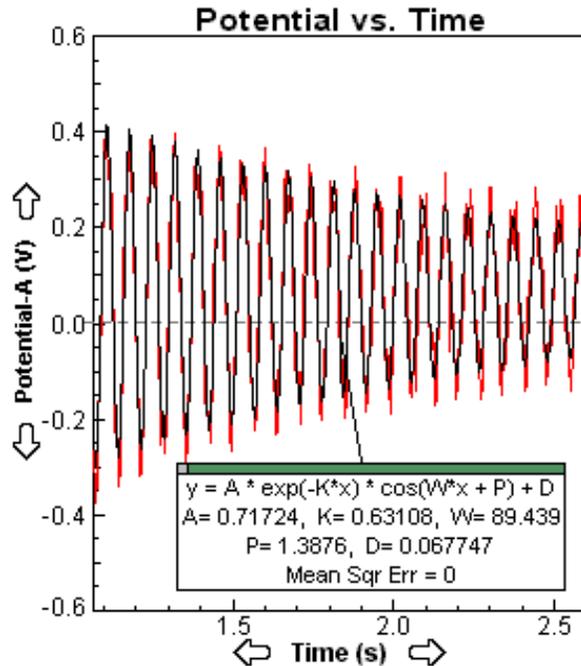


Figura 7 Se observa parte de la evolución temporal de la oscilación de la barra de bronce junto con el ajuste realizado para determinar el factor de amortiguamiento δ .

A partir de estos dos parámetros, se obtuvieron los valores de las frecuencias angulares ω_{0k} , del módulo de Young E y del factor de rozamiento b , de acuerdo a las ecuaciones (4). Para ello se utilizó el valor fundamental de $k = 1,875/L$ como explicamos anteriormente; se obtuvo la densidad lineal de cada barra a partir del peso de las barras y de su longitud, y se calculó el momento seccional de inercia de acuerdo a la geometría particular de cada barra ($I = \pi.d^4/64$). Estos datos necesarios para el cálculo del módulo de Young se encuentran recopilados en la Tabla 3:

Materiales	L (cm)	ρ_l (gr/cm)	I (cm⁴)
Bronce	36,0±0,1	1,01±0,01	0,00114±0,00002
Acero	23,0±0,1	0,99±0,02	0,00126±0,00004
Hierro	29,5±0,1	0,54±0,02	0,00040±0,00001
Grilón	21,0±0,1	0,62±0,02	0,0233±0,0002

Tabla 3 Resultados de las variables necesarias para el cálculo del módulo de Young de las barras estudiadas. Se pueden ver las longitudes de las barras L , las densidades lineales ρ_l y los momentos seccionales I calculados a partir de los diámetros de las barras.

Finalmente, observamos en la Tabla 4 que sigue a continuación, los valores de las frecuencias f_k y de los coeficientes de amortiguación δ obtenidos a través del análisis de la evolución temporal de las oscilaciones :

Materiales	f_k (s⁻¹)	δ (s⁻¹)
Bronce	14,3±0,3	0,63±0,04
Acero	40,2±0,7	1,47±0,04
Hierro	22,2±0,3	0,65±0,04
Grilón	24,2±3,5	7,45±0,08

Tabla 4 Resultados de las frecuencias f_k y los coeficientes de amortiguación exponencial δ de las oscilaciones de las barras estudiadas.

Tomando como base los datos que figuran en las Tablas 3 y 4, y a través de las ecuaciones (4) se obtuvieron los valores de los módulos de Young de las cuatro barras estudiadas como así también se pudieron estimar los valores de los coeficientes de rozamiento b que caracterizan la amortiguación de las oscilaciones de las barras.

Materiales	E (Pascales)	Error relativo de E	b (s/m⁴)
Bronce	(9,7±0,8) x 10¹⁰	17 %	(0,12±0,02)
Acero	(1,0±0,1) x 10¹¹	23 %	(0,23±0,04)
Hierro	(1,6±0,2) x 10¹¹	18 %	(0,11±0,03)
Grilón	(9,4±2,8) x 10¹⁰	34 %	(4,2±1,4)

Tabla 5 Resultados finales de los módulos de Young de las barras estudiadas obtenidas por el método dinámico. También se pueden observar los valores de los coeficientes de rozamiento b que caracterizan la amortiguación exponencial de las oscilaciones.

IV .- CONCLUSIONES

Método Estático :

Los resultados obtenidos mediante el arreglo experimental utilizado, adolecen de errores apreciables debido a lo indirecto del método. A la forma indirecta de medir el ancho de ranura se le suman los errores de propagación de los diversos parámetros presentes en las ecuaciones que permiten calcular el módulo de Young de las barras. Esto llevó a obtener errores del orden del 10% aproximadamente en todos los casos.

De cualquier modo, los valores hallados se encuentran cercanos a los valores empíricos que aparecen en la vasta bibliografía^{8,9,10} al respecto y que resumimos en la siguiente tabla :

Materiales	Módulo de Young (Pascales)
Bronce	8 - 10 x 10¹⁰
Acero	10 - 14 x 10¹⁰
Hierro	14 - 18 x 10¹⁰
Grilón	2.5 - 9 x 10⁸

Tabla 6 Resultados empíricos del módulo de Young de los distintos materiales utilizados en la experiencia. Se tabularon los rangos de valores hallados de acuerdo a las distintas bibliografías consultadas^{8,9,10}.

Los rangos posibles que aparecen en la Tabla 6, se deben a las distintas fuentes consultadas, como así también, en el caso de los metales, a las distintas composiciones de los materiales involucrados⁷. En el caso del Grilón, pudimos averiguar que se trata de un compuesto plástico cuyo nombre comercial es precisamente Grilón, de características físicas, químicas y mecánicas muy similares al compuesto Nylon 6/6 ó Polyamid 66, del cual si encontramos información, que es la volcada en la Tabla 6. Se trata de un compuesto fuerte, de gran elasticidad, resistente al uso, a la abrasión y a los agentes químicos, liviano y fácilmente moldeable. Su uso principal es en la fabricación de bujes, cojinetes, ruedas, engranajes autolubricados, sellos, etc¹⁰.

Método dinámico :

A través de esta otra metodología, se obtuvieron resultados algo mayores que los del método estático, pero también los errores provenientes de la propagación fueron mucho mayores llegando a ser del 30% en el caso del Grilón, ya que tanto la frecuencia de oscilación como el factor de amortiguamiento se hallaban mucho menos definidos que con los metales. De todos modos, los resultados son similares a los hallados en la primera parte, aunque menos precisos.

Cabe destacar que en todos los casos, el factor de amortiguación δ , por su escasa magnitud en comparación con la frecuencia angular ω_{0k} , no bastó para diferenciar suficientemente a la frecuencia libre de oscilación de las barras de la frecuencia amortiguada ω_k . Es decir, si hubiéramos supuesto a nuestro arreglo como libre de rozamiento, poco hubieran cambiado los resultados para el módulo de Young de los materiales estudiados.

Sin embargo, el cálculo de los coeficientes **b** nos permite llevar el análisis de la experiencia realizada un poco más adelante, aunque sea cualitativamente. Sabemos que el amortiguamiento presente en las oscilaciones se puede deber principalmente a dos causas : la primera, la resistencia del aire circundante, y la segunda, el rozamiento debido al deslizamiento de los planos internos de cada barra entre sí. El primero de los efectos debería introducir una fuerza restauradora proporcional al cuadrado de la velocidad de la barra en movimiento (típica de los procesos de turbulencias); en cambio, el segundo efecto proporcionaría una fuerza directamente proporcional a la velocidad⁵.

Como en la ecuación del movimiento dinámico de la barra se supuso presente un término de rozamiento proporcional a la velocidad, y como con este tipo de fuerzas la

amortiguación resulta ser de tipo exponencial, tal como la hallada en nuestra experiencia, concluimos que el rozamiento presente es causado por el deslizamiento interno de las capas del material que constituye las barras y no por la resistencia del aire circundante⁶. El coeficiente **b** calculado en la Tabla 4 es parte de la constante de proporcionalidad entre la fuerza amortiguadora F_{amort} y la velocidad **v** de la forma siguiente :

$$F_{\text{amort}} = A.v \quad \text{con } A = b.I.E.L = 2.m.\delta \quad , \quad (10)$$

donde **A** es la constante de proporcionalidad, y los demás parámetros involucrados son los mismos utilizados anteriormente.

A partir de la Tabla 4 se puede apreciar que en el caso de las barras metálicas, el valor de **b** es similar y mucho más pequeño que en el caso del Grilón, confirmando que este tipo de amortiguamiento por rozamiento interno se presenta con mayor fuerza en materiales más flexibles, como los materiales plásticos.

Asimismo, cabe destacar que aunque en el caso dinámico las mediciones resultaron mucho más fáciles de realizar debido al uso de la fotocelda y la placa digitalizadora, en el cálculo de los módulos de Young se obtuvieron errores mucho más grandes que los encontrados por el método estático.

Referencias bibliográficas

- 1- W.Seto, *Theory and problems of mechanical vibrations* (Ed. McGraw Hill , 1971) Capítulo 9.
- 2- Leonard Meirovitch, *Analytical methods in vibrations* (Ed. McMillan/ New York,1976) Páginas 382-410.
- 3- S.Hunter, *Mechanics of continuous media* (John Wiley & Sons, 1980) Capítulo 14.
- 4- Dean Ayersl, *Am. J. Phys.* **49**, 235 (1981)
- 5- R. Dornier, L. Kowalski and M. Stein, *Am J. Phys.* **63**, 364 (1995)
- 6- Christopher C. Jones, *Am J. Phys.* **63**, 232 (1995)
- 7- Bernard Scott, *Am J. Phys.* **45**, 45 (1977)
- 8- Fernández y Galloni, *Trabajos prácticos de Física* (Ed. Nigar, 1978) Tabla XII
- 9- Archer Knowlton, *Standard Handbook for Engineers* (McGraw Hill, 1981) Sec 15-3.
- 10- *Plastic Technology Buyer's Guide*, Bill Communications (1995)