

Determinación de Módulos de Young

Arrufat, Francisco Tomás – francisco@arrufat.com

Novick, Uriel Sebastián – Tel: 4861-1542

Frigerio, María Paz – mapazf@hotmail.com

Sardelli, Gastón – cosmo80@ciudad.com.ar

Universidad Favaloro, Facultad de Ingeniería – Bs. As. , Argentina- Julio 2001.

Utilizamos métodos dinámicos y estáticos para analizar los modos de vibración excitados en varas y tubos de diversos materiales. En el método dinámico estudiamos la dependencia de la frecuencia de vibración con las longitudes de las varas y tubos. En el método estático estudiamos la dependencia entre la deformación de las varas con la carga a la que son sometidas. Con la información, buscamos obtener el módulo de elasticidad de los materiales, encontramos que se puede conseguir dicho valor con sólo analizar el sonido emitido por los tubos al golpearlos.

INTRODUCCIÓN

Todo material existente es elástico y se deforma en cierto grado. Al construir un edificio se debe buscar que el material sea fuerte, pero a su vez flexible para no derrumbarse ante un terremoto; queremos que las alas de un avión puedan flexionarse, pero que a su vez sean resistentes.

Para determinar las propiedades elásticas de un material dado, es necesario en general someter a ensayos una muestra del material. Es claro que disponer de técnicas de ensayos no destructivos es una gran ventaja en muchas aplicaciones prácticas.

Definimos el **módulo de elasticidad** E de un material como la relación entre el esfuerzo $\sigma = \frac{F}{A}$ y la deformación

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} :$$

$$\sigma = E|\varepsilon|$$

El objetivo de este trabajo es determinar el módulo de elasticidad por distintos métodos experimentales. Analizamos también los diferentes modos de vibración que surgen en los materiales al estar sometidos a las diferentes condiciones de contorno.

I. EXPERIMENTO

El objetivo del presente experimento es, a través del análisis de varas y tubos de distintos materiales, variando las condiciones de contorno en que se encuentran las mismas, determinar el **módulo de elasticidad** de los materiales causando el menor daño y deformación a los mismos.

Para tal fin, optamos por dos métodos de análisis, uno dinámico y uno estático.

• **MÉTODO DINÁMICO** : Este método es representado mediante una ecuación diferencial de cuarto orden en la cual varían los resultados según las condiciones de contorno. Dicha ecuación ² es:

$$A\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

donde A es el área transversal a la onda de las varas, ρ es la densidad del material, I es el momento de área respecto de una línea neutra y E es el módulo de elasticidad buscado.

Las experiencias que realizamos fueron las siguientes:

EXPERIMENTO CON AMBOS EXTREMOS LIBRES

En esta primera parte del experimento analizamos el sonido emitido por los distintos tubos al ser golpeados. Para ello utilizamos tubos de bronce y de aluminio de distintos largos, un micrófono conectado a un digitalizador de señales conectado a una PC.

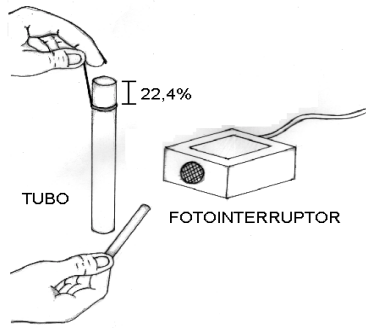


Figura 1. Ilustración del experimento realizado con ambos extremos de la vara libres y sujeta de un nodo tomando el sonido que emite al golpearla con un micrófono.

El primer paso fue estimar la posición del primer nodo desde uno de los extremos de cada vara, considerando que los nodos principales se encontraban ubicados aproximadamente al 22,4% de la longitud de las mismas. Esta medida se obtiene a partir del análisis de datos especificados en el apéndice. **(Es fundamental que este paso sea efectuado con la mayor precisión posible para optimizar al máximo la nitidez y duración del sonido, como así también cuidar de golpear el tubo en un antinodo).** Una vez hecho esto, procedimos a golpear los distintos tubos cerca del micrófono, y registramos los datos en la PC.

Una vez obtenidos los datos, y con la ayuda de la herramienta FFT (Fast Fourier Transformer), efectuamos Transformada de Fourier a los datos, obteniendo así los distintos modos que se excitaban en los tubos y las correspondientes frecuencias.

Resolviendo la ecuación (1) por el método de separación de variables con las condiciones de contorno correspondientes (*) se llega a la siguiente expresión para cada modo:

$$f_n = \frac{(kL)_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{A\rho}} \quad (2)$$

donde kL satisface $\cos(kL)\cosh(kL)=1$. Esta ecuación tiene varias soluciones, la cual da lugar a los distintos modos. $(kL)_1=4,73004$; $(kL)_2=7,8532$; $(kL)_3=10,99561$; etc.

EXPERIMENTO CON VARA EMPOTRADA

En esta parte del experimento utilizamos sólo una vara de bronce. Aquí necesitamos un fotointerruptor conectado a una PC y una prensa para empotrar la vara, como así también el programa para el procesamiento de los datos.

La disposición de los elementos ha de ser la siguiente:

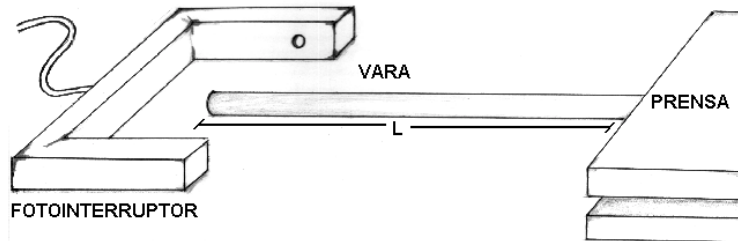


Figura 2. Ilustración del experimento realizado con la vara empotrada tomando con un fotointerruptor las vibraciones de la misma al moverla de su posición de equilibrio.

Variando la longitud L del extremo libre de la vara, e imprimiéndole una ligera fuerza inicial para ponerla a oscilar, se recogen los datos del periodo de dicha oscilación para las distintas longitudes de L .

Resolviendo la ecuación (1) con las condiciones de contorno correspondientes (*) se llega a la siguiente ecuación para el modo fundamental:

$$f = \frac{0.597^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (3)$$

* La resolución de la ecuación (1) con las condiciones de contorno para llegar a (2) y (3) pueden verse en el apéndice.

- **MÉTODO ESTÁTICO** : Este método se representa mediante otra ecuación diferencial, la cual describe el desplazamiento en el eje “y” de la vara cuando se le suspenden diversos pesos. La ecuación correspondiente³ es:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4)$$

siendo $M(x)$ el momento flexor, I el momento de área respecto de una línea neutra y E el módulo de elasticidad buscado.

EXPERIMENTO CON VARA EMPOTRADA Y DIVERSOS PESOS

Para esta parte del experimento, utilizamos la misma vara que en la etapa anterior. Esta vez, precisamos de la prensa antes utilizada, una regla milimetrada y diversos pesos (P_o) bien especificados (**Tuvimos cuidado de no utilizar pesos excesivos, ya que le imprimen una deformación permanente a la vara, lo cual es no deseable**).

Dejando libre una porción de longitud L constante, procedimos a colgar los pesos a diferentes distancias l desde donde empotramos la vara, midiendo el desplazamiento en el extremo libre de la vara con los distintos pesos.

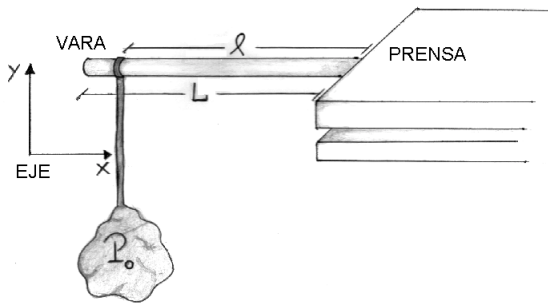


Figura 3. Ilustración del experimento realizado con la vara empotrada agregando diversos pesos a la misma.

La ecuación (4) puede ser resuelta aplicando la transformación de Laplace^(*) para llegar al siguiente resultado:

$$y(x) = \frac{P_o x^2}{EI} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{6} \right) \quad 0 < x < l$$

$$y(x) = \frac{P_o l^2}{EI} \left(\frac{x}{2} - \frac{l}{6} \right) \quad l < x < L$$

(5)

II. RESULTADOS

Para cada experimento en particular analizamos el comportamiento de las varas y los tubos, y la dependencia que pudieran las frecuencias con la distancia donde empotramos la vara y los pesos aplicados con la deformación consiguiente.

Conseguimos mediante gráficos el módulo de elasticidad, realizando una regresión lineal con los datos experimentales, guiándonos con las ecuaciones averiguadas de manera que la pendiente de la recta nos proporcionara el valor correspondiente con su respectivo error.

• **MÉTODO DINÁMICO**

ANÁLISIS DE FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN

En la primer parte del experimento, determinamos las frecuencias correspondientes al modo fundamental para tubos de bronce libres de distintos largos. El primer gráfico realizado (Figura 4) se hizo con el fin de comprobar la proporcionalidad entre la frecuencia fundamental con $1/L^2$, como señala la ecuación (2).

* Para ver el procedimiento de resolución de la ecuación (5) se puede consultar: Pipes, Louis A., *Matemáticas Aplicadas para Ingenieros y Físicos*, Cap. 9, Sección 4 (Ed. McGraw Hill, 1963).

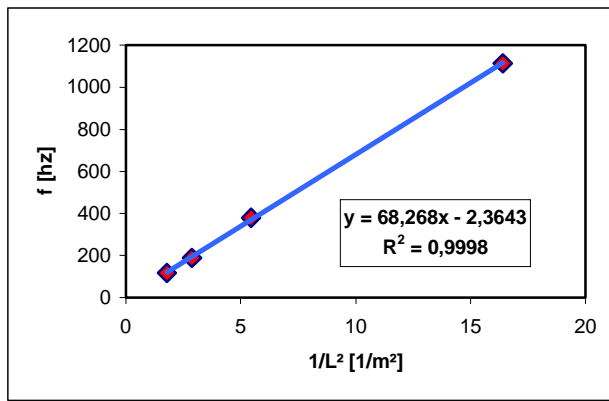


Figura 4. Gráfico de las frecuencias fundamentales en función de $1/L^2$ para los tubos de bronce.

Hicimos la misma comprobación para los tubos de aluminio como puede observarse en la Figura 5.

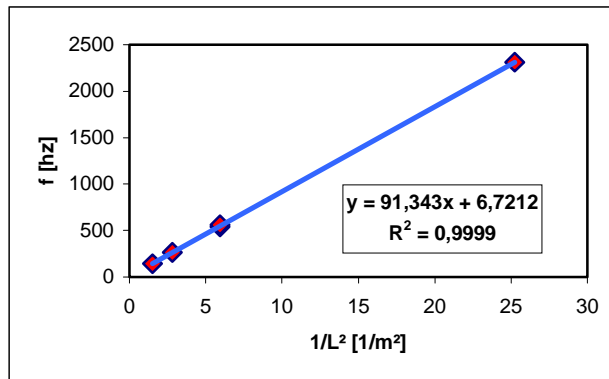


Figura 5. Gráfico de las frecuencias fundamentales en función de $1/L^2$ para los tubos de aluminio.

Para la vara de bronce utilizada en la segunda experiencia del método dinámico, recogimos los datos del período de oscilación y realizamos el mismo gráfico de la frecuencia en función de $1/L^2$ realizado para la primera experiencia.

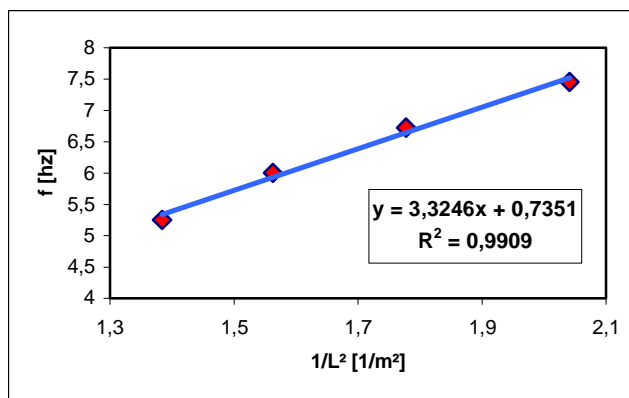


Figura 6. Gráfico de la frecuencia fundamental de la vara en función de $1/L^2$.

DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD

Con el fin de conseguir el valor del módulo de elasticidad, podemos describir la ecuación (2) como:

$$f_n^2 = CE \quad \text{con} \quad C = \frac{I(kL)_n^4}{4\pi^2 A\rho L^4} \quad (6)$$

La pendiente será igual a E .

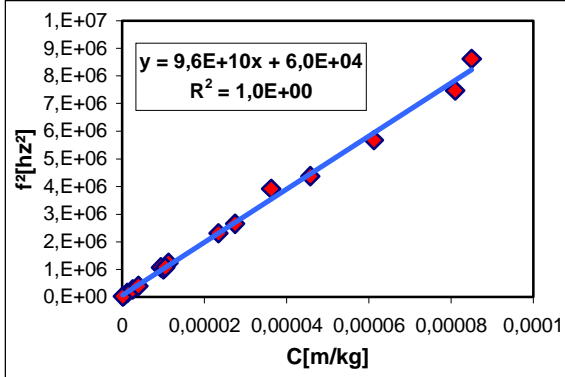


Figura 7. Gráfico para la determinación del módulo de elasticidad de los tubos de bronce.

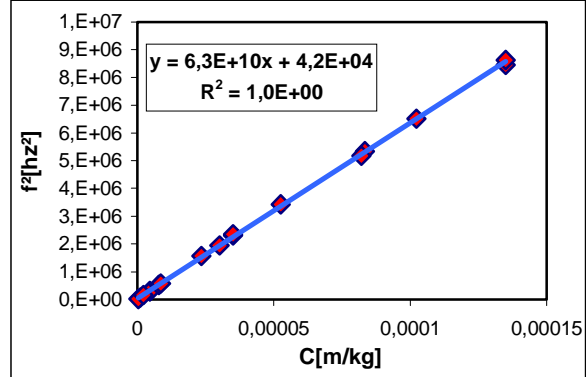


Figura 8. Gráfico para la determinación del módulo de elasticidad de los tubos de aluminio.

Una ventaja de este último procedimiento es que comprueba la validez general de la ecuación (2) y nos permitió utilizar todas las frecuencias correspondientes a los diversos modos excitados para obtener E .

A partir de los gráficos, obtuvimos los valores del módulo de elasticidad para ambos materiales:

$$E_{\text{bronce}} = (9,6 \pm 0,2)10^{10} \text{ Pa}$$

$$E_{\text{aluminio}} = (6,32 \pm 0,03)10^{10} \text{ Pa}$$

En el segundo experimento del método dinámico, para determinar el módulo de elasticidad de la vara, describimos la ecuación (3) como:

$$f^2 = DE \quad \text{con} \quad D = 0.597^4 \frac{I\pi^2}{4\mu L^4} \quad (7)$$

Analizamos el gráfico (Figura 9) que muestra a E como la pendiente de la recta.

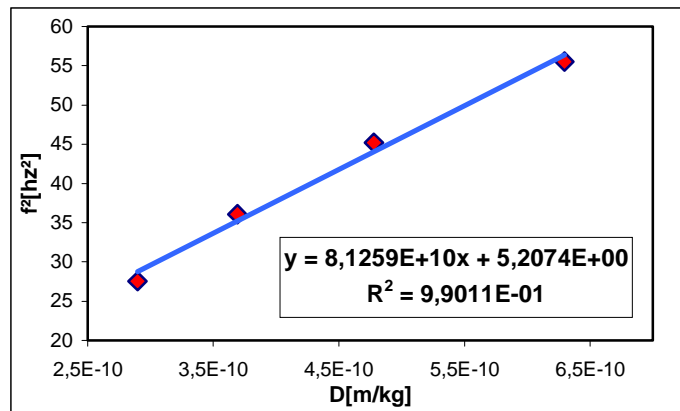


Figura 9. Gráfico para la determinación del módulo de elasticidad de la vara mediante regresión lineal.

El valor de E obtenido fue: $E = (8,1 \pm 0,6)10^{10} \text{ Pa}$

• MÉTODO ESTÁTICO

ANÁLISIS DE LA DEFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PESOS

Como señalan las ecuaciones (5), la deformación en un punto es directamente proporcional al peso aplicado transversalmente, manteniendo constante la posición donde éste se aplica. Para corroborar esta relación realizamos un gráfico ilustrativo.

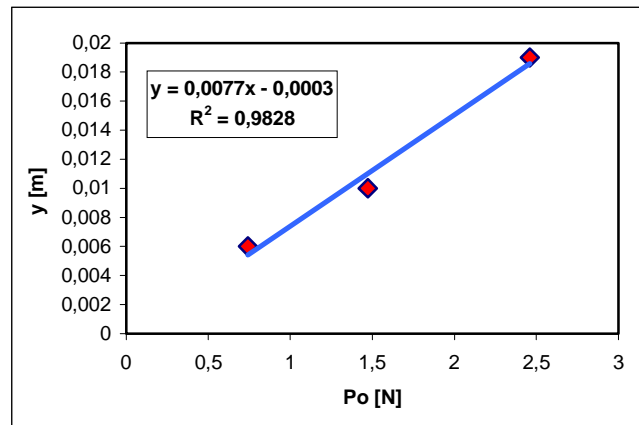


Figura 10. Gráfico de la deformación en función del peso.

DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD

Para determinar el módulo de elasticidad de la misma vara utilizada en el experimento anterior, graficamos

$G = \frac{P_o l^2}{I} \left(\frac{x_o}{2} - \frac{l}{6} \right)$ en función de la deformación medida cerca del extremo libre en un punto x_o en la Figura 11.

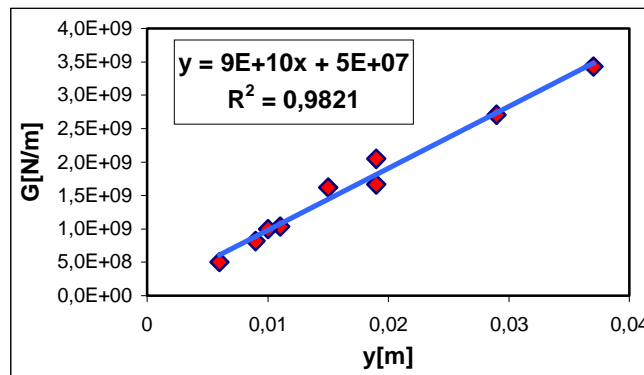


Figura 11. Gráfico para determinar el módulo de elasticidad de la vara que puede apreciarse como la pendiente de la recta.

El módulo de elasticidad obtenido en este caso fue: $E = (9,3 \pm 0,5)10^{10} Pa$

III. CONCLUSIÓN

En este experimento se estudió, por una parte, los modos de vibración de barras con distintas condiciones de contorno, y también buscamos la determinación del módulo de elasticidad de un material causándole el menor daño posible.

En cuanto a los modos de vibración, observamos por medio de las figuras 4, 5 y 6, que en todos los métodos dinámicos, la frecuencia de vibración de los modos excitados depende de forma inversa con la longitud elevada al cuadrado de las varas y los tubos. A partir de esto, observamos que cuánto más larga es la vara o el tubo, mayor es la cantidad de modos que se excitan en los mismos.

Para los módulos de elasticidad, construimos la siguiente tabla con los valores de E obtenidos para los distintos materiales, y los valores que proporcionan los libros de texto.

MATERIAL	CASO 1	CASO 2	CASO 3	MEJOR VALOR	TABLAS
BRONCE	$(9,6 \pm 0,2)10^{10}$ Pa	$(8,1 \pm 0,6)10^{10}$ Pa	$(9,3 \pm 0,5)10^{10}$ Pa	$(9,4 \pm 0,2)10^{10}$ Pa	$10,8 \cdot 10^{10}$ Pa
ALUMINIO	$(6,32 \pm 0,03)10^{10}$ Pa	-	-	$(6,32 \pm 0,03)10^{10}$ Pa	$7,0 \cdot 10^{10}$ Pa

Tabla 1. Cuadro comparativo de los valores de E obtenidos experimentalmente para los diversos materiales y los valores conocidos.

De aquí observamos que los valores de los módulos de elasticidad obtenidos, varían, para el bronce, en un rango de 8 a 10×10^{10} Pa, lo cual concuerda con otras experiencias consultadas y es próxima al valor de las tablas, y en cuanto a los tubos de aluminio, el valor obtenido fue próximo al valor que se encuentra en tablas. Estas variaciones son aceptables ya que se deben a que, a pesar de tratarse de un mismo material, las varas y los tubos analizados poseen propiedades propias de elaboración.

Haciendo una comparación de los resultados obtenidos por medio de los sonidos emitidos por los tubos versus los obtenidos por medio de los otros métodos, vemos que podemos obtener un valor del módulo de elasticidad que se encuentra en el rango general de aceptación de estos valores para cada material. Como se ve, al poder obtener el valor del módulo de elasticidad con sólo golpear el material y analizar los sonidos emitidos, poseemos una muy buena forma de obtener este valor, sin causar prácticamente daño alguno al material. Esto sería un ejemplo de un ensayo no destructivo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Sears, Semansky y Young, *Física Universitaria* (Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1986), Cap.10, Pág. 255.
2. D.L.R. Oliver, "Hollow-Tube Chimes," *Phys.Teach.* **36**, 209 (Abril 1998).
3. Pipes, Louis A., *Matemáticas Aplicadas para Ingenieros y Físicos* (Ed. McGraw Hill, 1963), Cap.9, Sección 4.
4. Lafita Babio, Felipe y Mata Cortés, Hilario, *Introducción a la teoría de vibraciones mecánicas* (Ed. Labor, Barcelona).
5. www.fisicarecreativa.com – Martínez, Patricia y Azuaga, Marcelo, *Medición del módulo de elasticidad de Young*.

APÉNDICE

En esta sección pueden encontrarse los desarrollos teóricos realizados para los distintos experimentos, los cuales son útiles para analizar las ondas en cada situación y para determinar el módulo de elasticidad de los materiales:

EXPERIMENTO CON AMBOS EXTREMOS LIBRES

La ecuación diferencial que describe las vibraciones de un tubo libre en ambos extremos ² es la siguiente:

$$A\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (8)$$

donde A es el área transversal a la onda de las varas, ρ es la densidad del material, I es el momento de área respecto de una línea neutra y E es el módulo de elasticidad del material.

La ecuación (8) puede resolverse por el método de separación de variables, considerando $y(x,t)=X(x)T(t)$. La solución de la ecuación es:

$$y(x,t) = X(x)e^{\pm i\omega t} \quad (9)$$

Como la vara está libre en los extremos, no se doblan ya que no hay fuerzas restauradoras, por lo tanto, las derivadas segunda y tercera de X son nulas.

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^3 X}{dx^3} = 0 \quad (10)$$

Aplicando las condiciones (10) a $X(x)$ se obtiene:

$$X(x) = A \left\{ \cos(kx) + \cosh(kx) + \left[\frac{\cosh(kL) - \cos(kL)}{\sinh(kL) - \sin(kL)} \right] [\sin(kx) + \sinh(kx)] \right\} \quad (11)$$

donde kL satisface para cada modo:

$$\cos(kL)\cosh(kL) = 1 \quad (12)$$

DE la ecuación (12) se deduce también los puntos de los nodos para los distintos modos, estando al 22,4% del extremo para el primer modo. Por lo tanto, la ecuación para la frecuencia angular es:

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{A\rho}} \quad (13)$$

De (13) sale que:

$$f_n = \frac{(kL)_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{A\rho}} \quad (14)$$

A partir de (12) se está en condiciones de conocer el módulo de elasticidad simplemente reemplazando los valores de frecuencias obtenidos para cada modo con el kL correspondiente. Sabiendo que $I = \int_A y^2 dA$ se da:

$$\frac{I}{A} = \frac{R_{int}^2 + R_{ext}^2}{4} \quad (15)$$

para los tubos con radio interno R_{int} y radio externo R_{ext} .

EXPERIMENTO CON VARA EMPOTRADA

La ecuación diferencial que corresponde al movimiento de vibración libre de la vara⁴ es:

$$c^2 \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

Siendo $c^2 = \frac{EI}{\mu}$ una constante del sistema, donde E es el módulo de elasticidad, I el momento de área respecto de una línea neutra y μ es la masa de la vara por unidad de longitud.

Este caso, al igual que el anterior, puede resolverse con el método de separación de variables tomando $x(y,t)=Y(y)T(t)$ y ajustando las condiciones de contorno para este caso:

$$x(0,t) = \frac{\partial x}{\partial y}(0,t) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(L,t) = \frac{\partial^3 x}{\partial y^3}(L,t) = 0$$

La solución será de la forma:

$$x(y,t) = Y(y)Sen(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

A partir de (16) y con las condiciones dadas en (17) se obtiene que:

$$Y(y) = A \left\{ Sen\sqrt{\frac{\omega}{c}}y + Senh\sqrt{\frac{\omega}{c}}y + \frac{Cos\sqrt{\frac{\omega}{c}}L + Cosh\sqrt{\frac{\omega}{c}}L}{Sen\sqrt{\frac{\omega}{c}}L - Senh\sqrt{\frac{\omega}{c}}L} \left[Cos\sqrt{\frac{\omega}{c}}y - Cosh\sqrt{\frac{\omega}{c}}y \right] \right\} \quad (19)$$

donde ω satisface:

$$Cos\sqrt{\frac{\omega}{c}}L = -\frac{1}{Cosh\sqrt{\frac{\omega}{c}}L} \quad (20)$$

Lo cual da una infinidad de frecuencias naturales del sistema:

$$\omega_n = \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} c \quad (21)$$

A partir de (21) se puede encontrar E reemplazando el valor de la frecuencia con su correspondiente n . En este caso, I puede calcularse como:

$$I = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (22)$$

donde R es el radio de la vara maciza.