

" EFECTO COMPTON "

Federico Hasenbalg, Juan J. Galdos y Enrique R. Batista

LABORATORIO 1 - UBA - 1990

El objeto de la práctica es estudiar uno de los casos en que la radiación electromagnética, presenta comportamiento corpuscular, como lo hace en el Efecto Compton.

Se midió la energía con que salen los fotones a distintos ángulos con respecto a la dirección de incidencia, la sección eficaz de scattering (predicha por la fórmula de Klein-Nishina) y se compararon los resultados obtenidos al variar la naturaleza del blanco dispersor, verificandose las predicciones teóricas.

1 Introducción teórica

Quando sobre una distribución de electrones libres incide radiación electromagnética, se observa una reemisión de esta en todas las direcciones. Vamos a analizar las predicciones de cada una de las teorías que intentan explicarlo.

1.1 Electrodinámica clásica [2]

Si una onda electromagnética plana, monocromática y linealmente polarizada, incide sobre un electrón, este comenzará a oscilar con la frecuencia de la onda incidente ω , y emitirá radiación de esta frecuencia, según la siguiente ley:

$$dI = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot c^3} \cdot (\vec{d} \times \vec{n})^2 d\omega$$

donde dI es la energía emitida en un elemento de ángulo sólido $d\omega$, \vec{d} es el momento dipolar del sistema emisor (en este caso el electrón), y \vec{n} es el versor de la dirección de observación.

Para el electrón vibrando en el campo de la onda incidente tenemos:

$$\vec{d} = \frac{e^2}{m} \cdot \vec{E}$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico de la onda incidente,

$$dI = \frac{e^4}{4 \cdot \pi \cdot m^2 \cdot c^3} \cdot (\vec{E} \times \vec{n})^2 d\omega$$

El flujo de energía de la onda incidente (su vector de Poynting) es:

$$S = \frac{c}{4 \cdot \pi} \cdot E^2$$

entonces la sección eficaz de dispersión vale:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{e^2}{m \cdot c^2} \right)^2 \cdot \text{sen}^2(\phi)$$

Si, como sucede ordinariamente, la radiación incidente no está polarizada, debemos promediar esta fórmula para todas las direcciones posibles de \vec{E} , en un plano perpendicular a \vec{n}_0 , el versor que indica la dirección de propagación de la onda. Su cálculo conduce a:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{m \cdot c^2} \right)^2 \cdot (1 + \cos^2\theta)$$

donde:

$$\text{sen}\theta = |\vec{n} \times \vec{n}_0|$$

La observación directa muestra que esta fórmula (y la constancia de ω), solo vale para frecuencias de la onda incidente suficientemente baja.

1.2 Mecánica cuántica (electrones no relativistas)

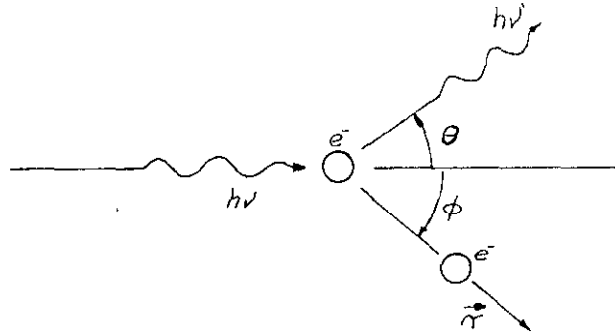
Consideremos un modelo como el siguiente: La radiación electromagnética se compone de fotones, partículas de energía

$$E = h \cdot \nu$$

e impulso

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{c} \cdot \nu$$

siendo "h" la constante de Planck y "c" la velocidad de la luz en el vacío.
Así, el problema queda planteado como sigue:



Suponemos que al electrón se le puede aplicar la mecánica newtoniana ($E = 1/2 m v^2$). Planteamos en la interacción la conservación del impulso y de la energía para un choque plástico entre el fotón y un electrón libre y obtenemos:

$$E = E' + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$\frac{E}{c} = \frac{E'}{c} \cdot \cos \theta + m \cdot v \cdot \cos \phi$$

$$\frac{E'}{c} \cdot \sin \theta = m \cdot v \cdot \sin \phi$$

de donde se obtiene:

$$(1) \quad \left(\frac{E}{m \cdot c^2} \right)^2 + \left(\frac{E'}{m \cdot c^2} \right)^2 - \frac{2 \cdot E \cdot E'}{(m \cdot c^2)^2} \cdot \cos \theta = \frac{2 \cdot (E - E')}{m \cdot c^2}$$

y para $E \ll mc^2$, como el primer término es de segundo orden en E/mc^2 , también lo será el segundo término, lo que implica que:

$$E - E' \approx \frac{E}{m \cdot c^2}$$

o bien $E' = E$, es decir volvemos al resultado clásico, no hay cambio en w .

1.3 Mecánica cuántica (electrones relativistas)

En este caso el problema es similar. La única diferencia es que la energía del electrón adopta la siguiente forma:

$$E^2 = m^2 \cdot c^4 + c^2 \cdot p^2$$

y planteando nuevamente la conservación de la energía y el impulso se obtiene:

$$(2) \quad E - E' = \frac{E \cdot E'}{m \cdot c^2} \cdot (1 - \cos \theta)$$

nuevamente si $E \ll mc^2$ resulta $E' = E$.

Observamos que la expresión (1) para $\theta \ll 1$ se reduce a la (2)

$$\left(\frac{E - E'}{m \cdot c^2} \right)^2 + \frac{E \cdot E'}{(m \cdot c^2)^2} \cdot \theta^2 = \frac{2 \cdot (E - E')}{m \cdot c^2}$$

de (1) o (2), si $\theta = 0$, $E = E'$, y para θ chico podemos escribir $E - E' \ll mc^2$, y tendremos:

$$\left(\frac{E - E'}{m \cdot c^2} \right)^2 \ll \frac{E - E'}{m \cdot c^2}$$

con esto tenemos:

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E'} = \frac{\theta^2}{2 \cdot mc^2}$$

Esta es también la expresión a que se reduce la fórmula (2) para $\theta \ll 1$.
A ángulos chicos, las fórmulas coinciden ya que en este caso la energía transferida al electrón es también chica y tenemos

$$\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

1.4 Electrodinámica cuántica

Esta teoría predice, a través de la fórmula de Klein-Nishina la forma de la sección eficaz de dispersión. Esta es:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{m \cdot c^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 + \cos^2\theta}{[1 + \alpha \cdot (1 - \cos\theta)]^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot (1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta) \cdot [1 + \alpha \cdot (1 - \cos\theta)]} \right)$$

donde

$$\alpha = \frac{E}{m \cdot c^2}$$

Para $E \ll mc^2$, se reduce a

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{m \cdot c^2} \right)^2 \cdot (1 + \cos^2\theta)$$

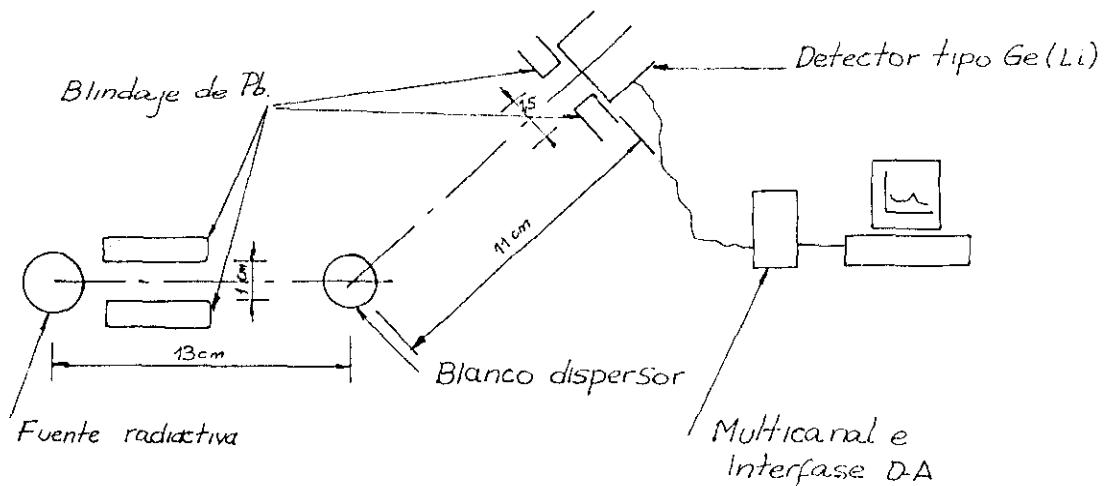
que es lo que predice la electrodinámica clásica.

2 Instrumental utilizado - Arreglo experimental

Para llevar a cabo la experiencia se utilizó:

- * Fuentes radiactivas : Co^{60} , Eu^{152} , Cs^{137} , Ba^{133} .
- * Blancos o muestras : Aluminio, Bronce, Acero, Plomo, Teflon.
- * Mesa graduada en ángulos.
- * Detector de radiación Gama tipo Ge(Li) (EG&G ORTEC).
- * Fuente de alta tensión.
- * Amplificador.
- * Analizador multicanal
- * Sistema MCA (de recolección de datos) para IBM PC.

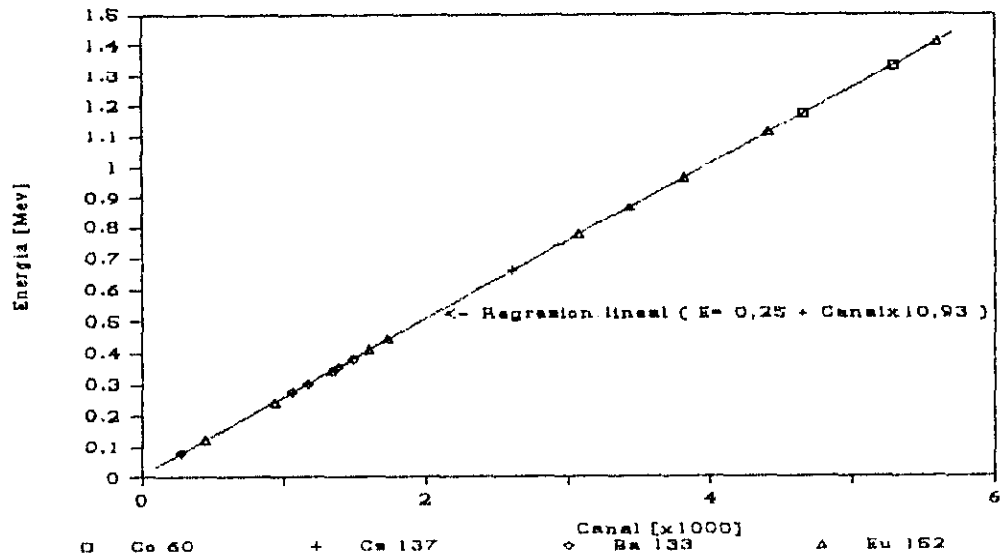
Con esto, el arreglo experimental fue el siguiente:



3 Mediciones

3.1 Calibración del sistema

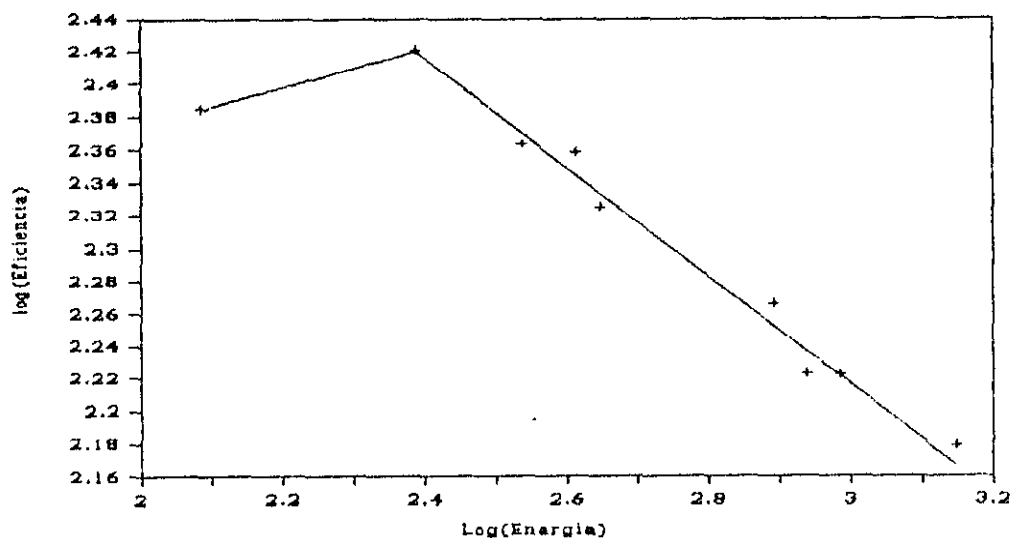
Como el detector de rayos Gama, nos entregaba, como dato, cantidad de pulsos registrados por el mismo en función de "Canales", se debieron poner fuentes con picos conocidos (Co^{60} , Eu^{152} , Cs^{137}) frente al detector y asociarle a cada uno de los picos que aparecieran, la energía conocida que obtuvimos de tablas [1]. Así pudimos aproximar entre el número de canal y la energía, la siguiente recta, (ver apéndice 3)



3.2 Calibración de la eficiencia del detector (relativa)

Conocidas las intensidades relativas de las diferentes energías de emisión (del Eu^{152}) [1], y midiendo las intensidades relativas de los picos registrados en la experiencia, pudimos trazar una curva de eficiencia relativa del detector, o sea, número de fotones detectados dividido el número de fotones emitidos, en función de la energía.

El gráfico obtenido fue el siguiente:

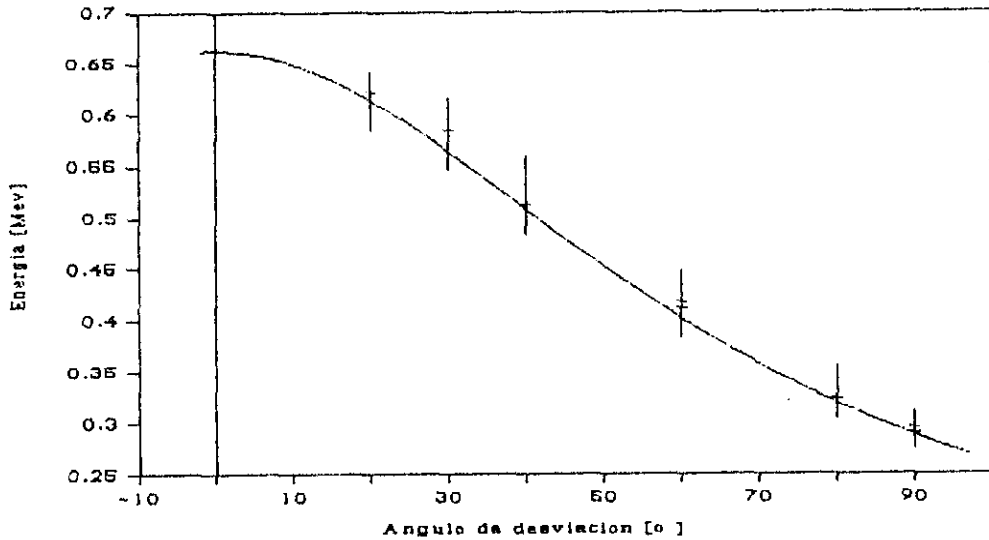


resultando :

$$\begin{aligned} \text{Eficiencia} &= \text{Exp}(3,21 - 0,33 \times \text{Log}(\text{Energía})) \text{ para Energía} < 245 \text{ Kev} \\ &= \text{Exp}(2,31 + 0,035 \times \text{Log}(\text{Energía})) \text{ para Energía} > 245 \text{ Kev} \end{aligned}$$

3.3 Energía del foton dispersado

Se midió para diversos ángulos de desviación (20, 30, 40, 60, 80, 90), y para cada uno de los distintos materiales presentados, la cantidad de pulsos registrados por el detector y clasificados según su correspondiente energía. Estos valores los graficamos (ver apéndice 2). De estos gráficos obtuvimos el valor de la energía del pico, al que le asociamos $E(\theta)$, y estos son los valores que se presentan en el siguiente gráfico junto a las curvas de predicción hechas en la introducción teórica.



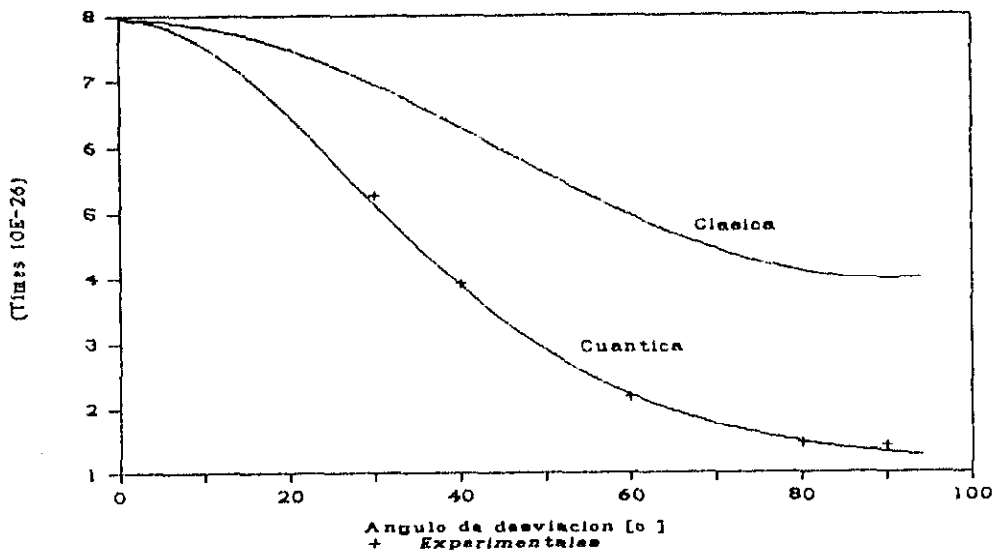
3.4 Sección eficaz de Scattering (relativa)

Con las tablas de datos experimentales, calculamos la sección eficaz, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Sigma_v}{N \cdot \Delta\Omega}$$

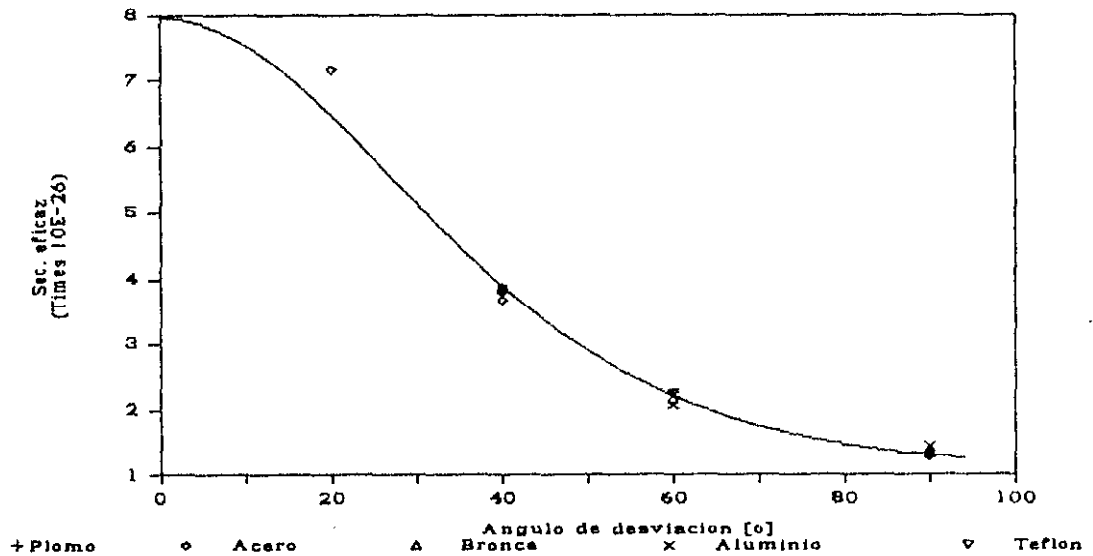
siendo, Σ_v la cantidad de cuentas bajo el fotopico, N número de electrones en la muestra, $\Delta\Omega$ ángulo sólido del detector.

Los valores así calculados se comparan en el siguiente gráfico con las predicciones de la Electrodinámica (Clásica y Cuántica)



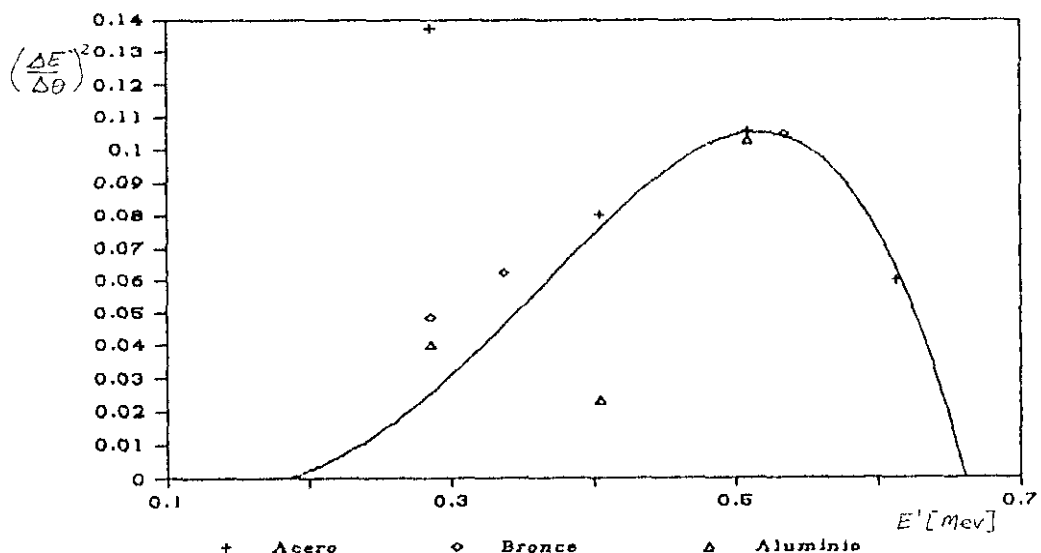
3.5 Comparacion de la seccion eficaz, para varios materiales

En el siguiente grafico, se ilustran superpuestos, los valores de seccion eficaz experimentales tomados con centros dispersores de diversas naturalezas a saber: Aluminio, Bronce y Plomo



3.6 Ancho del pico a mitad de altura (FWHM)

De los gráficos de Intensidad vs. Energía (presentados en apéndice 2), medimos el FWHM, lo que nos da la dispersión, y en consecuencia una medida del error de los datos en función del ángulo, a estos datos los dividimos por el estimado según el criterio mencionado en el apéndice 1, y esta cantidad es la que se graficó.



En el gráfico se compara la predicción teórica hecha en el apéndice 1, con los datos experimentales. Cada tipo de símbolo en el gráfico, representa el tipo de blanco dispersor utilizado.

4 Resultados y Conclusiones

Vimos que la sección eficaz de scattering se ajustó a la predicción de Klein-Nishina no a la predicción clásica (según 3.4), y en ningún caso dependió del material utilizado como fuente de electrones libres (blanco dispersor).

La predicción del FWHM hecha en el apéndice 1, fue bastante acertada para ángulos chicos (ver 3.6), aumentando la dispersión con ángulos grandes. También se nota independencia del tipo de blanco.

Los valores de energía en función de θ , encontramos que se ajustan a la predicción (ver 3.3), a pesar de observarse un error sistemático en la medición de aproximadamente $1,5^\circ$.

En los espectros de nro. de cuentas vs. energía, se observa a ángulos distintos de 0° , el pico de 661 Kev, correspondiente a los fotones que interactúan con átomos enteros (ver apéndice 2).

La geometría es más apropiada, cuanto mayor son las distancias entre la fuente-blanco y blanco-detector, como se ve en el apéndice 1, los picos se angostarían y aumentaría la resolución.

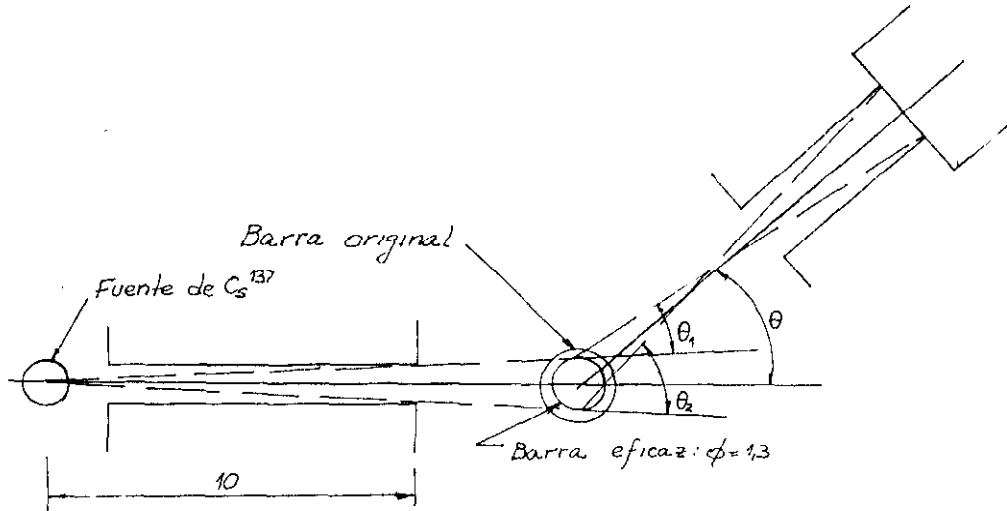
Como efectos secundarios se observaron el Borde Compton, El pico de Backscattering y el pico de 511 Kev (que se encuentran discutidos en los apéndices 4 y 5).

De los gráficos del apéndice 2, se desprende una eficiencia de Compton según el material del blanco, o sea, la proporción de fotones que hacen Compton frente a todos los que llegan al blanco. Esta eficiencia aumenta según la siguiente serie: Plomo, Teflón, Aluminio, Acero y Bronce.

5 Referencias

- [1] C.M. Lederer and V.S. Shirley, Eds. *Table of Isotopes*. 7th Edition. John Wiley and Sons, New York (1978).
- [2] L. Landau, Lifchitz. *Curso de física teórica*. Tomo 2. Ed. Reverte.
- [3] R.D Evans. *The Atomic Nucleus*. Mac Grow Hill.
- [4] G.F. Knoll. *Radiation Detection and Measurement*. John Wiley and Sons. New York (1979)

6 Apendice 1: Prediccion del ancho del pico Compton



Debido a que ni el blanco, ni el detector eran puntuales, se detectaban fotones de la fuente de cesio y dispersados con ángulos diferentes al de medición. Estos ángulos se consideraron de la siguiente manera:

a) El borde del pico con menor energía es el correspondiente a los fotones que hicieron Compton en la parte inferior del blanco, y llegaron al extremo superior del detector (según la figura).

b) El borde de mayor energía es el de los fotones menos desviados, o sea que corresponde a los que interactuaron con un electrón de la parte superior del blanco y llegaron al extremo inferior del detector (ver figura).

De la expresión,

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} \cdot (1 - \cos \theta)$$

siendo $E_0 = mc^2$, y trabajando con incrementos de primer orden se tiene:

$$\frac{\Delta E'}{E'^2} = \frac{\text{sen} \theta}{E_0} \cdot \Delta \theta$$

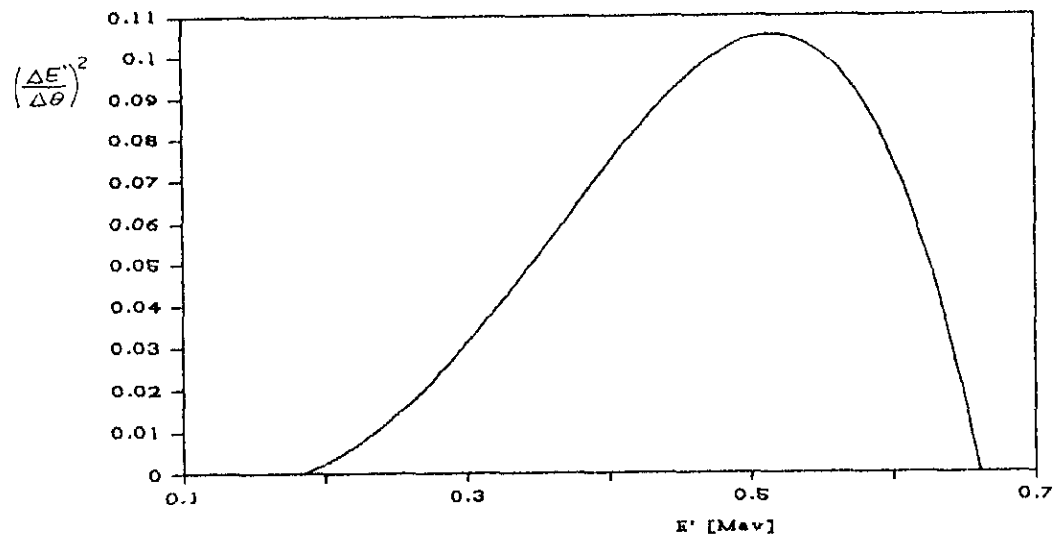
de donde se deduce que

$$\left(\frac{\Delta E'}{\Delta \theta}\right)^2 = \frac{E'^2}{E_0^2} \cdot \left(-E'^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot E_0}{E} + \frac{E_0^2}{E^2}\right) + E' \cdot \left(2 \cdot E_0 + \frac{2 \cdot E_0^2}{E}\right) - E_0^2\right)$$

Suponiendo que $\Delta \theta$ es independiente de θ , esta fórmula da, a menos de un factor constante, $FWHM^2$ como función de E' . Para el valor de E usado (0,6616 Mev) y como $E_0 = 0,511$ Mev, se tiene

$$\left(\frac{\Delta E'}{\Delta \theta}\right)^2 = E'^2 \cdot (-8,21 \cdot E'^2 + 6,94 \cdot E' - 1)$$

En el siguiente grafico se muestra esta prediccion:



Usando el criterio antes eniciado para estimar el obtenemos que:

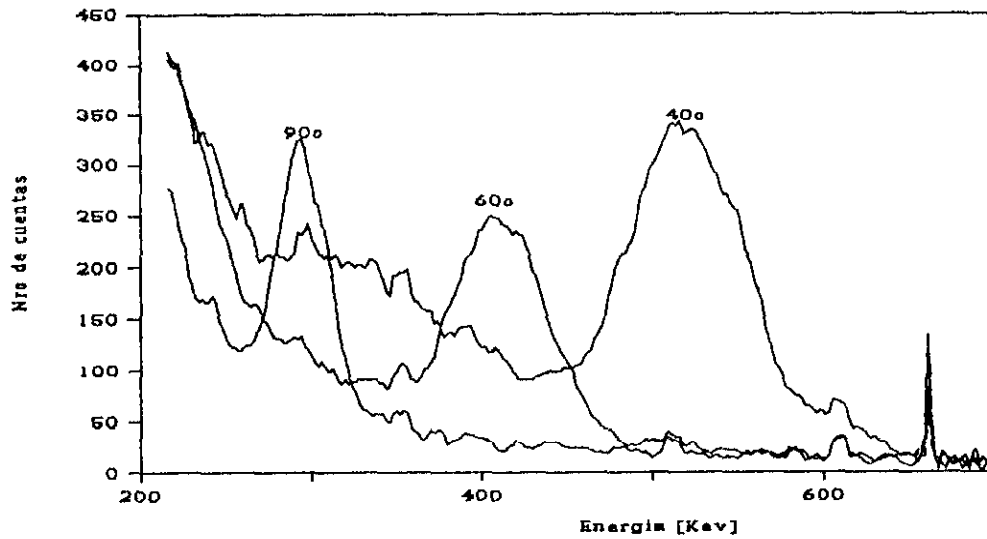
$$\theta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{11 \cdot \operatorname{sen}(\theta) - 0,75 \cdot \cos(\theta) - 0,65}{11 \cdot \cos(\theta) + 0,75 \cdot \operatorname{sen}(\theta)} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{0,5}{10} \right)$$

$$\theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{11 \cdot \operatorname{sen}(\theta) + 0,75 \cdot \cos(\theta) + 0,65}{11 \cdot \cos(\theta) - 0,75 \cdot \operatorname{sen}(\theta)} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{0,5}{10} \right)$$

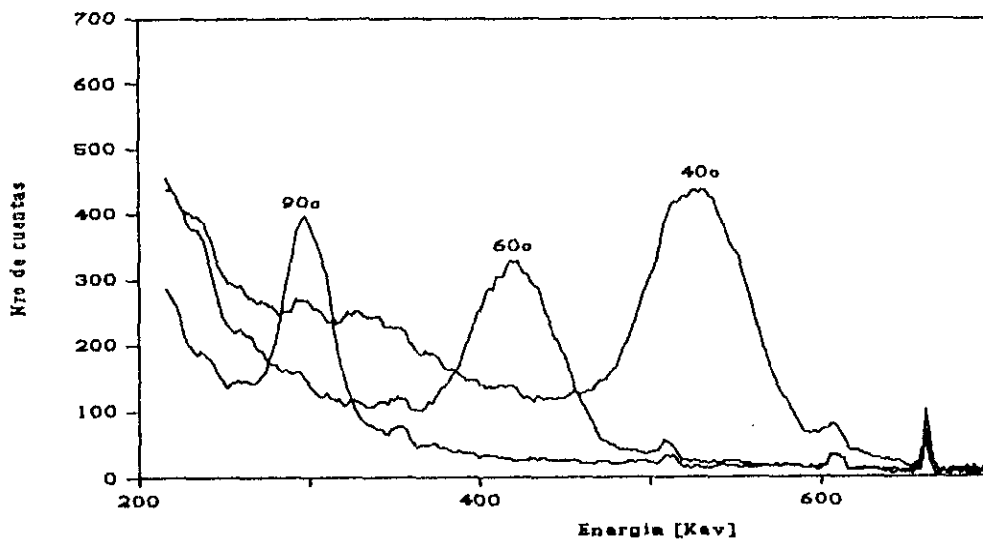
7 Apendice 2: Graficos de Numero de cuentas vs. Energia

A continuación se muestran los espectros obtenidos con blancos de diferentes materiales. Se han superpuesto los espectros tomados a diversos ángulos para una mejor comparación.

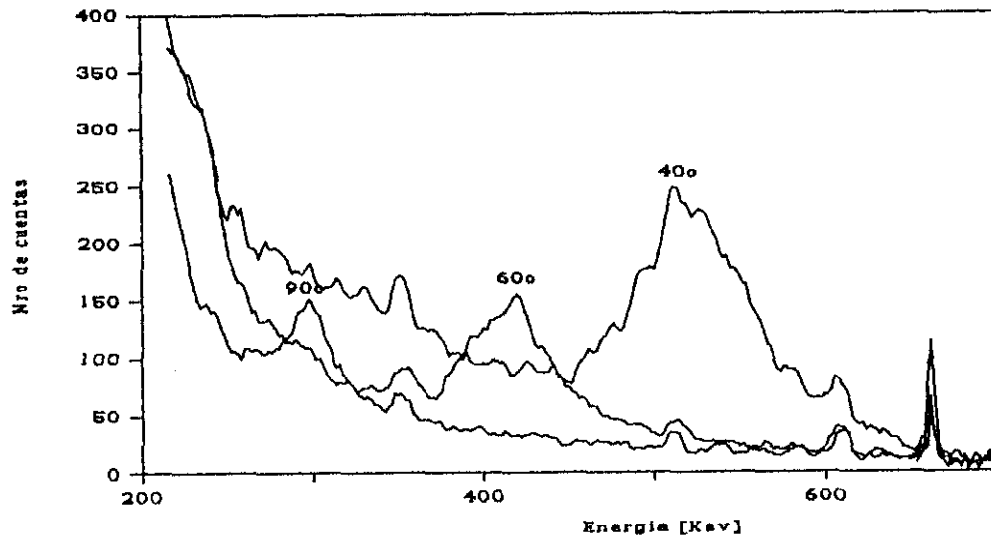
- Con blanco de aluminio



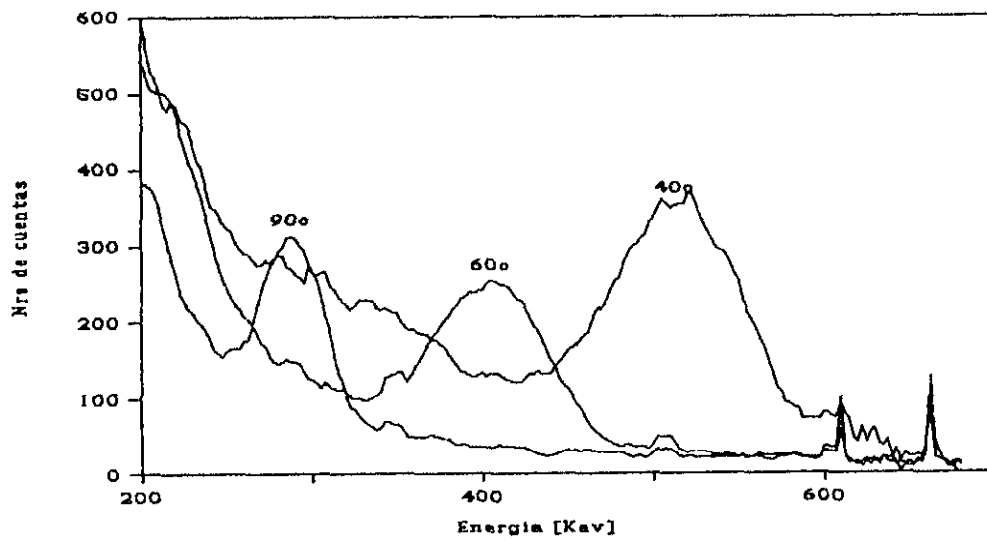
- Con blanco de acero



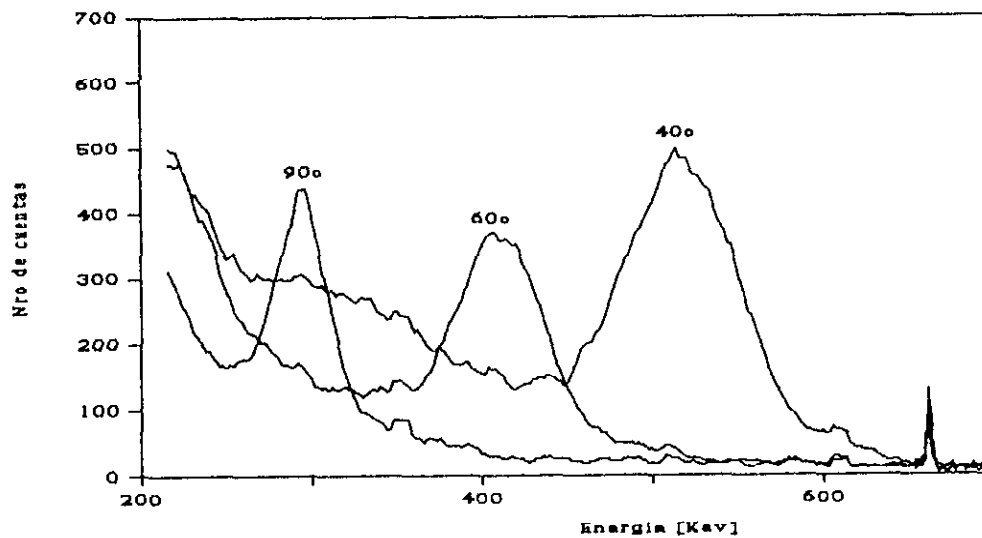
- Con blanco de plomo



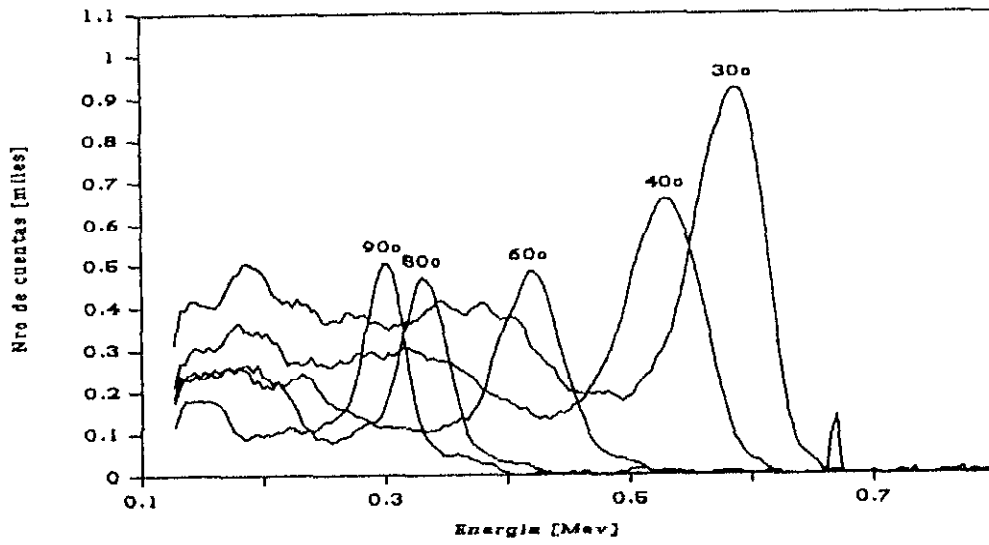
- Con blanco de teflón



- Con blanco de bronce



Los siguientes espectros se obtuvieron modificando la geometría de la experiencia, como se detalla a continuación. El blanco que se puso fue de bronce,

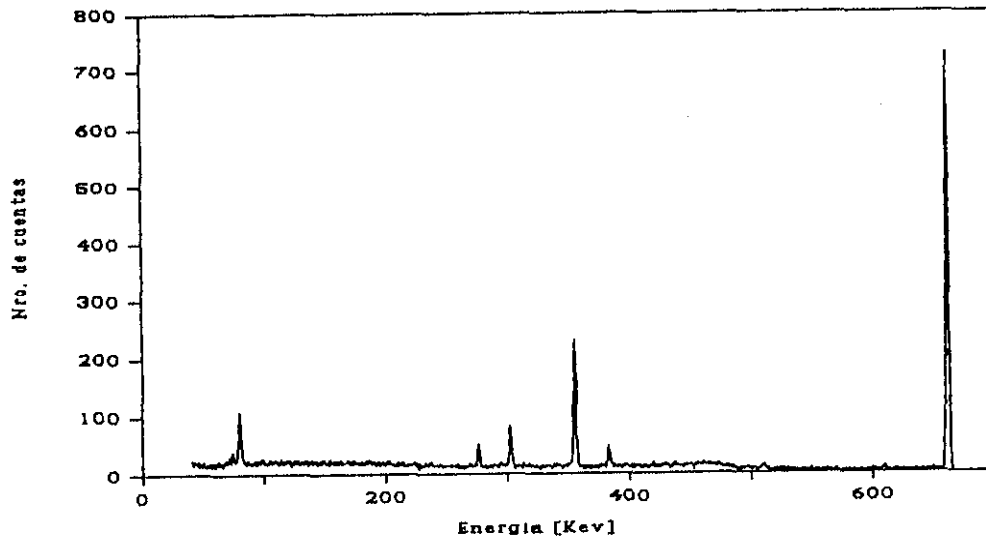


el arreglo experimental utilizado en este caso fue:

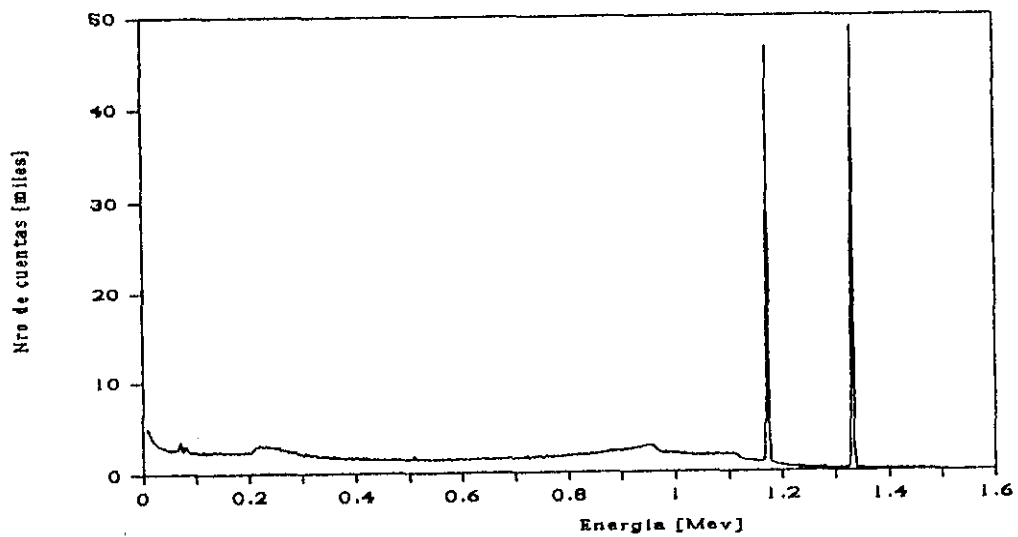
8 Apendice 3: Calibracion del detector

Para encontrar los datos usados en la calibración de la escala del detector, nos vasamos en las tablas de puntos de los siguientes gráficos:

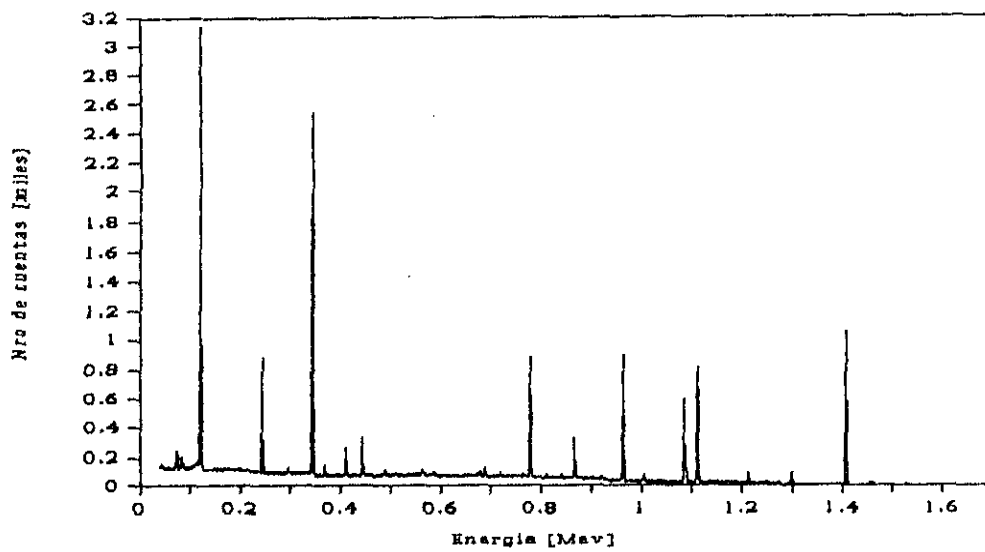
- Espectro registrado con fuente de Bario 133 y Cesio 137



- Con fuente de Cobalto 60



- Con fuente de Europio 152



De aquí los picos que observamos fueron:

Elemento	Canal del pico	Energia (de tabla) [Kev]
Co	4654.29	1173.23
Co	5292.22	1332.48
Cs	2605.35	661.6
Ba	1062.34	276
Ba	1167.38	302
Ba	1380.43	356
Ba	1491.67	382
Eu	442.76	121.779
Eu	934.57	244.693
Eu	1333.47	344.272
Eu	1601.40	411.107
Eu	1732.90	443.979
Eu	3074.76	778.905
Eu	3429.36	867.330
Eu	3816.52	964.017
Eu	4303.76	1085.80
Eu	4321.64	1089.73
Eu	4409.24	1112.4
Eu	5594.50	1408.02

9 Apéndice 4: Funcionamiento del detector Ge(Li) [4]

Este es un detector del tipo, de estado sólido de Ge(Li). El germanio es un material semiconductor. Si se lo pone dentro de un capacitor, se podrá formar el siguiente sistema recolector de cargas libres (propias de la red):

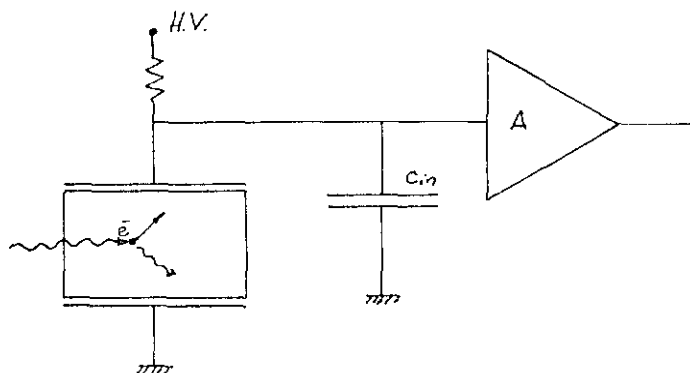


Figura 1

Las cargas son producidas cuando una partícula energética (en nuestro caso un fotón gama), incide en el Ge.

El número de portadores producidos es proporcional a la energía absorbida. Esta propiedad (la linealidad), será considerada en la elección del material constitutivo del detector.

La carga así colectada, será proporcional a la energía incidente, a pesar de estar sujeta a fluctuaciones estadísticas. Para evitar la producción de cargas libres debidas a energía térmica, se sumerge al detector en nitrógeno líquido.

Integrando la corriente que sale del detector, se obtiene una medida de la carga.

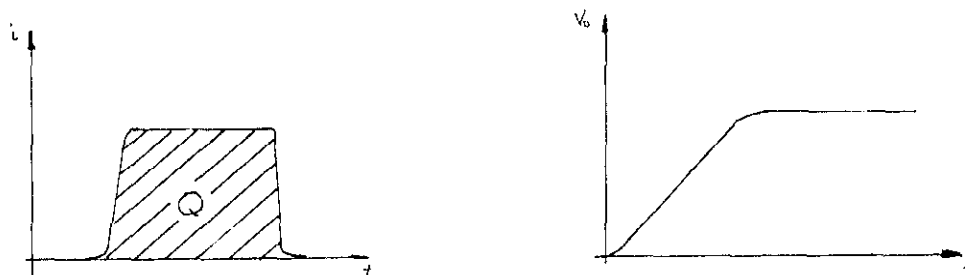


Figura 2

Como resultado se obtiene una tensión proporcional a la carga, y en consecuencia, proporcional a la energía incidente.

Con un sistema electrónico (Multicanal), se puede analizar y clasificar los pulsos detectados y entrando estos datos a través de una interface a la PC, podremos obtener el espectro.

El principal productor de portadores libres, dentro de los límites de energía utilizados, es el efecto fotoeléctrico, o sea, el fotón es completamente absorbido, y lo que resulta en el espectro es un pico en la energía del gama. (ver figura 3 a)

Otro efecto que se produce dentro del detector es Compton. Esto producirá una meseta correspondiente a todos los ángulos de desviación posibles (ver figura 3 b). El rayo gama dispersado podrá volver a interactuar con otro electrón pero con menor probabilidad. Lo que se verá en este caso es lo expuesto en la figura 3c.

En la experiencia se observan los tres efectos juntos, obteniéndose la figura 3d.

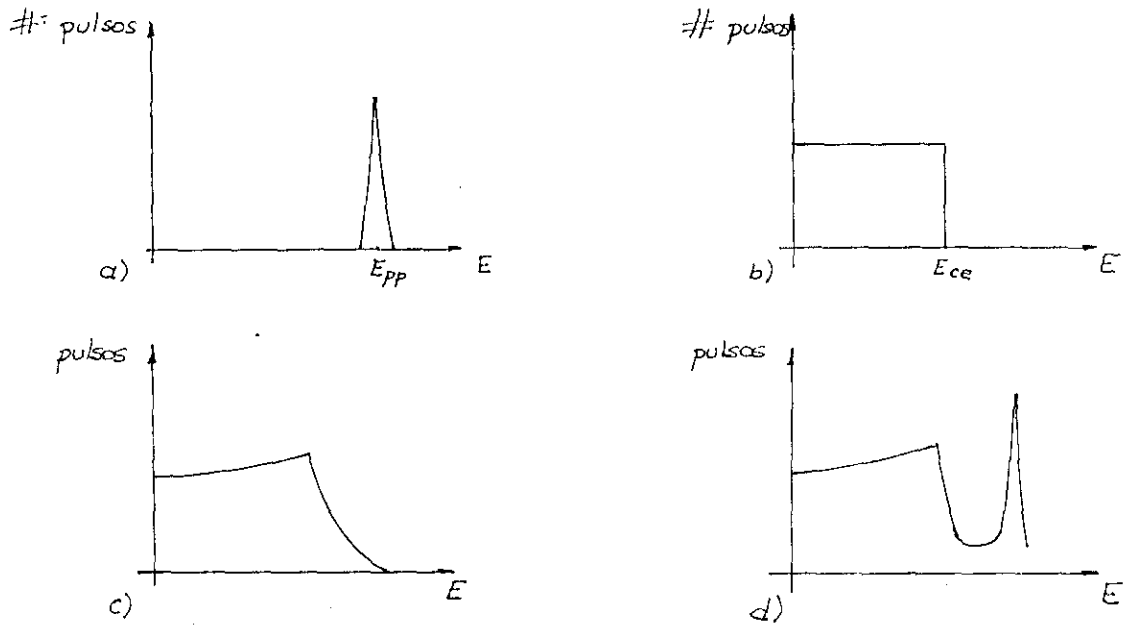


Figura 3

El valor E_{pp} (fotopico), corresponde a la energía incidente.

La caída del número de cuentas en el valor E_{ce} , correspondiente al borde Compton, o sea tiene la energía de los electrones dispersados con la máxima energía cinética. Como se vió en la introducción teórica, esta energía es:

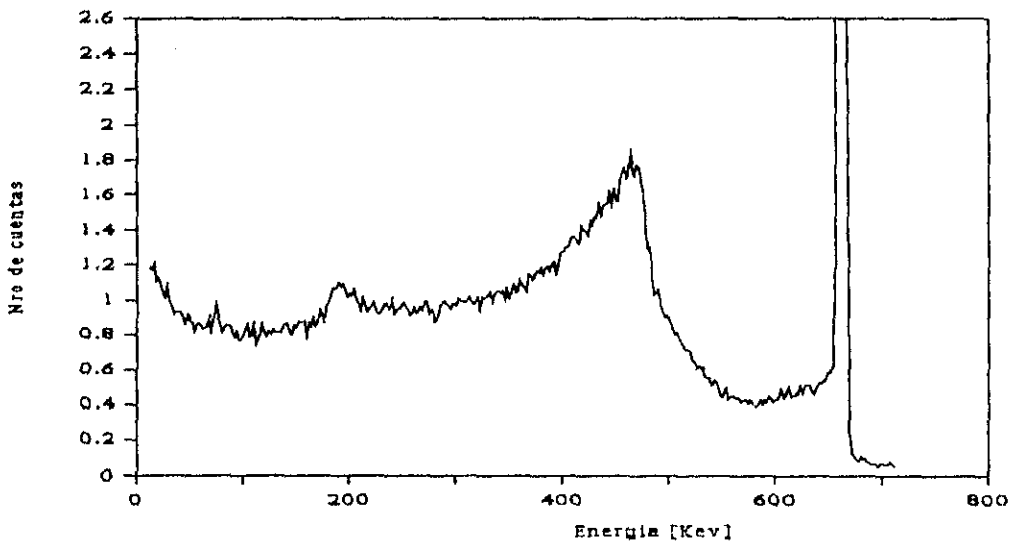
$$E_{e,max} = h \cdot (\nu - \nu_{min}) = \frac{2 \cdot (h \cdot \nu)^2}{m_e \cdot c^2 + 2 \cdot h \cdot \nu}$$

y la energía del gama dispersado

$$E_{\gamma'} = \frac{h \cdot \nu}{1 + \frac{2 \cdot h \cdot \nu}{m_e \cdot c^2}}$$

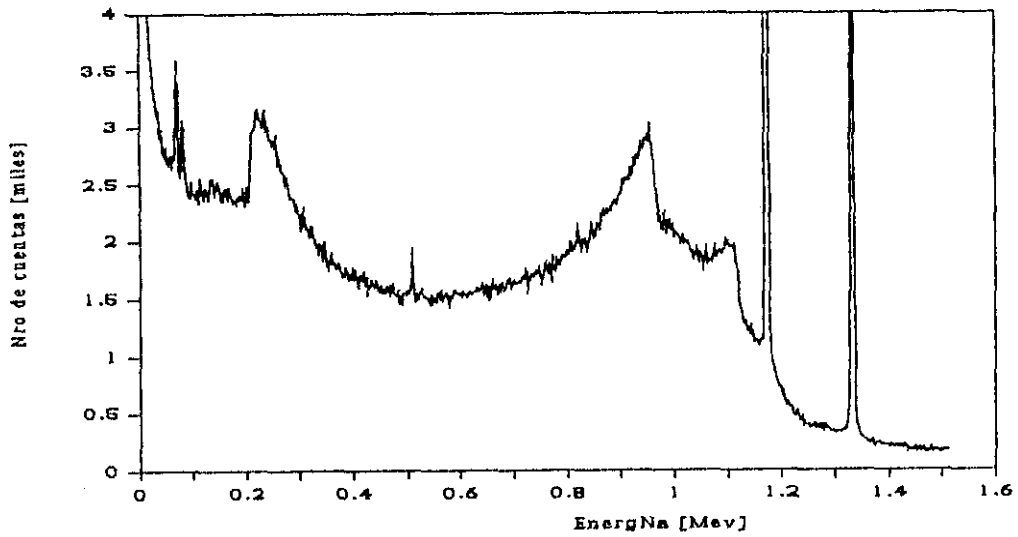
10 Apendice 5: Backscattering y Borde Compton

Una serie de defectos provenientes de las características del detector se observaron, como en los siguientes graficos:



Espectro con fuente de Cesio 137

Espectro con fuente de Cobalto 60



Comenzaremos explicando la forma del borde compton.
 Expresando la distribución de Klein-Nishina (ver sección 1.4), en función de la energía cinética del electrón dispersado se obtiene [3]:

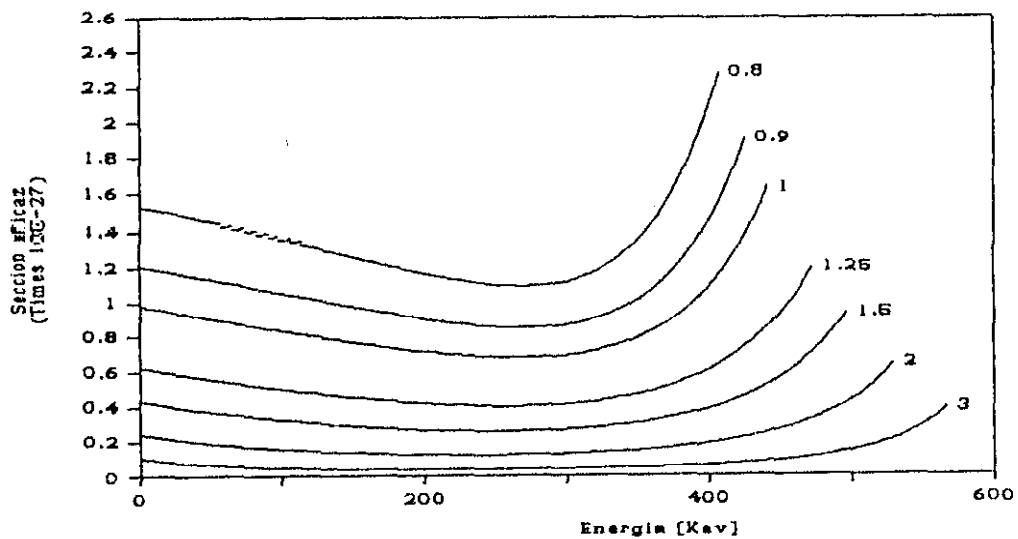
$$\cot(\phi) = (1 + \alpha) \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$T = h \cdot \nu_0 \cdot \frac{2 \cdot \alpha \cdot \cos^2(\phi)}{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2 \cdot \cos^2(\phi)}$$

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\alpha^2 \cdot m_e \cdot c^2} \cdot \left[\frac{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2 \cdot \cos^2(\phi)}{(1 + \alpha)^2 - \alpha \cdot (2 + \alpha) \cdot \cos^2(\phi)} \right]$$

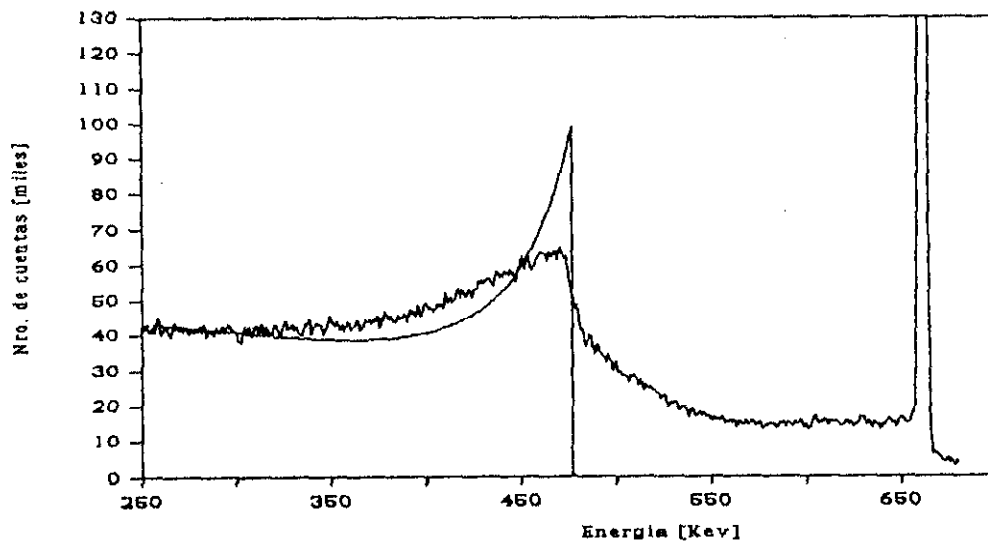
representando esta expresión la distribución de probabilidad de que el electrón salga dispersado con energía cinética entre T y T+dT.

En el siguiente gráfico se dibujó esta función para distintos valores de α



donde se observa un máximo pronunciado en la energía correspondiente a que el fotón se disperse a 180 grados (ver apéndice 4).

En buena aproximación, se puede decir que esta es la justificación a nuestro espectro, lo que se ve en la siguiente comparación:



Es de resaltar que en el espectro del Cobalto 60 se pueden apreciar dos bordes Compton, correspondientes a los dos rayos gama que emite esta fuente.

El segundo efecto, es el Backscattering. Este pico es producido por los fotones que hacen Compton a 180 en las inmediaciones del detector, y luego son medidos. Por el análisis antes hecho, vemos que estos son los gama más abundantes y por esto se observa el pico en 184 Kev.

Por último queremos citar el pico de 511 Kev, que aparece en medio de la meseta Compton, en el espectro del Cobalto. Este corresponde a la producción de positrones por parte de esta fuente, y su pronta aniquilación con los abundantes electrones de la red.