

Interacción radiación-materia. Cinemática relativista.

Laboratorio 5 - Dpto. de Física - UBA - 1999

Araceli Billodas, Christian Helman y Aureliano Tartaglione.
Laboratorio 5, Dpto. de Física, FCEYN, Universidad de Buenos Aires.

Se analizaron los espectros de rayos gamma provenientes de las fuentes radiactivas ^{60}Co , ^{207}Bi , ^{22}Na , ^{137}Cs y ^{133}Ba , utilizando un detector de centelleo de NaI(Tl). El efecto Compton producido en dicho detector es usado para mostrar la necesidad de un tratamiento relativista de la relación entre la energía y el momentum y demostrar la dependencia de p , E y γ con β .

I. INTRODUCCIÓN

Radiación gamma.

La radiación gamma es emitida por núcleos excitados en su transición a niveles nucleares más bajos. Los rayos gamma pueden ser tratados como ondas electromagnéticas o como partículas llamadas fotones. Una onda electromagnética es caracterizada por su longitud de onda λ o su frecuencia ν . Un fotón es una partícula que tiene carga cero y masa en reposo cero, que viaja con la velocidad de la luz y que tiene una energía $E=h\nu$, donde h es la constante de Planck. Las propiedades ondulatorias del fotón son usadas para mediciones a bajas energías solamente. En todos los demás casos, la detección de fotones esta basada en sus interacciones con partículas.

Existen solo tres mecanismos de interacción de rayos gamma con la materia que poseen relevancia en la espectroscopia de dichos rayos:

i. *Absorción fotoeléctrica.* Es una interacción en la que el fotón gamma incidente desaparece. En su lugar, es producido un fotoelectrón de una de las capas electrónicas del material absorbente con una energía cinética dada por la energía del fotón incidente $h\nu$ menos la energía de ligadura del electrón en su capa original E_b .

ii. *Efecto Compton.* Es una colisión elástica entre un electrón ligado y un fotón incidente, siendo la división de energía entre ambos dependiente del ángulo de dispersión. La energía máxima que puede ser transferida al electrón viene dada por¹:

$$T_{max} = E_g - \frac{E_g}{1 + \frac{2E_g}{m_0c^2}} \quad (1)$$

donde E_g y T_{max} son las energías del fotón y el electrón dispersados, respectivamente, y $m_0c^2=511$ KeV es la masa en reposo del electrón.

iii. *Producción de pares.* El proceso ocurre en el campo de un núcleo del material absorbente y corresponde a la creación de un par electrón - positrón en el punto en que desaparece el fotón gamma incidente.

Dado que el positrón no es una partícula estable, una vez que su energía cinética se haga despreciable se aniquilara o se combinara con un electrón del material absorbente.

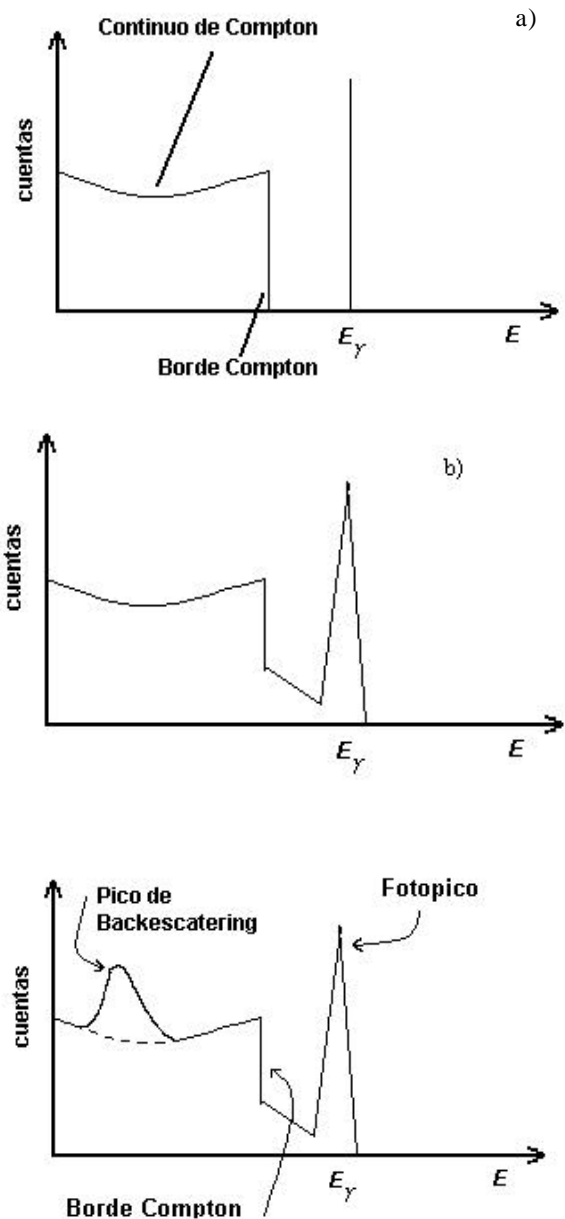


Figura 1. a) Predicción teórica del espectro de un material emisor de fotones gamma. b) Borde Compton esperado para un detector con dimensiones finitas. c) Se observa como el efecto de backscattering se superpone a la meseta Compton

En este punto ambos desaparecen y son reemplazados por dos fotones gamma de aniquilación, cada uno con energía $m_0c^2=511$ KeV.

El tiempo requerido para que el positrón reduzca la velocidad y se aniquile es pequeño, así que la radiación de aniquilación aparece en virtual coincidencia con la producción de pares original.

Detección de la radiación gamma.

1. Detectores.

Como mencionamos, los fotones son partículas sin carga y, por esto, no producen ionización en el medio a través del cual pasan. Son los electrones creados en las interacciones con estos fotones las que proveen la información sobre la naturaleza de la radiación incidente. Luego, para que un detector sirva como espectrómetro de rayos gamma debe llevar a cabo dos funciones distintas. Primero, debe actuar como un medio de conversión en que los rayos gamma incidente tengan una probabilidad razonable de interactuar para dar uno o más electrones y, segundo, debe funcionar como un detector convencional para estos electrones.

2. Características de los espectros de rayos gamma obtenidos con un detector estándar².

En el caso del efecto Compton, y en circunstancias normales, todos los ángulos de dispersión ocurren en el detector. Así es como un continuo de energías puede ser transferidas al electrón, desde cero hasta el máximo predicho por la ecuación 1. Para un fotón gamma con una dada energía, la distribución de energía del electrón viene dada, por la figura 1.a.

Existe, por otro lado, la cuestión del tamaño del detector. Con esto nos referimos a la comparación de su tamaño con el camino libre medio de los fotones gamma secundarios producidos en interacciones de los fotones gamma incidentes, donde este camino libre medio es del orden de los cm. Para un detector real (es decir, del orden del camino libre medio) el espectro predicho es el mostrado en la figura 1.b.

Por ultimo, los materiales que rodean al detector pueden tener una influencia medible sobre su respuesta. Cuando el efecto Compton ocurre en el material que rodea al detector, existe una alta probabilidad de que la energía del fotón dispersado sea depositada en el detector. La energía mínima del fotón dispersado es:

$$T_{min} = \frac{E_g}{1 + \frac{2E_g}{m_0c^2}} \quad (2)$$

donde E_g es la energía del fotón incidente y $m_0c^2=511$ KeV es la masa en reposo del electrón.

Ocasionalmente un pico, dado por la energía de la ecuación 2, aparece en el espectro de rayos gamma. Este pico se denomina pico de backscattering (figura 1.c)

Cinemática del efecto Compton.

Para el borde Compton, la energía del electrón corresponde a la de un fotón dispersado 180° (problema unidimensional). La energía de un fotón es :

$$E_g = p_g c \quad (3)$$

donde p_g es el impulso del fotón. Usando la ecuación 3 y la conservación del impulso y la energía obtenemos :

$$pc = 2E_g - T \quad (4)$$

donde E_g es la energía del fotón y T la energía cinética del electrón. Como un primer intento de determinar la masa del electrón, asumamos como correcta la relación no relativista $T=p^2/(2m_{nr})$. De esta forma, la energía (en reposo) del electrón viene dada en función de las cantidades experimentales por :

$$m_{nr}c^2 = \frac{(2E_g - T)^2}{2T} \quad (5)$$

Por otro lado, de la contracción del cuadvivector energía - momento $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ surge la relación central entre la energía y el momento en relatividad especial :

$$(pc)^2 + (m_0c^2)^2 = (T + m_0c^2)^2 = E^2 \quad (6)$$

donde E es la energía total del electrón (cinética mas masa en reposo). De aquí resulta :

$$m_0c^2 = \frac{p^2c^2 - T^2}{2T}$$

Y reemplazando la ecuación 3 se obtiene m_0c^2 en función de las magnitudes medidas :

$$m_0c^2 = \frac{2E_g(E_g - T)}{T} \quad (7)$$

Se puede despejar de la ecuación 7 la energía cinética del electrón en función del fotón gamma incidente :

$$T = \frac{2E_g^2}{2E_g + m_0c^2} \quad (8)$$

Por otro lado, para determinar la velocidad del electrón, o equivalentemente $\mathbf{b} = v/c$, se puede utilizar la masa relativista m y las relaciones $p=m.v$ y $E=m.c^2$ para obtener :

$$\mathbf{b} = \frac{pc}{E} = \frac{T(2E_g - T)}{T^2 - 2E_gT + 2E_g^2} \quad (9)$$

El factor relativista \mathbf{g} puede ser obtenido de la relación :

$$E = \gamma m_0c^2 \quad (10)$$

II. ARREGLO EXPERIMENTAL Y PROCEDIMIENTO

En la figura 2 se muestra el dispositivo utilizado para la obtención de espectros de rayos gamma de fuentes radiactivas. El centelleador NaI(Tl) produce una cierta cantidad de fotones ópticos cuando sobre él inciden fotones gamma, quedando contenida la información de la energía del rayo gamma en el numero de fotones ópticos y no en su energía. Estos fotones ópticos, a su vez, inciden sobre el fotocatodo de un fotomultiplicador. En el fotocatodo, cada fotón visible que incide produce la emisión de electrones por efecto fotoeléctrico. Estos son acelerados y dirigidos hacia una serie de electrodos en los cuales al colisionar contra los mismos, por cada electrón incidente son expulsados un numero n de electrones. Estos son nuevamente acelerados y dirigidos hacia otros electrodos, consiguiéndose así un efecto multiplicador. De esta forma, la salida del fotomultiplicador entrega un pulso de tensión cuya amplitud es proporcional a la energía del rayo gamma original. El multicanal realiza un análisis de la altura del pulso, convirtiendo una señal analógica (tensión) en un numero digital equivalente (numero de canal)

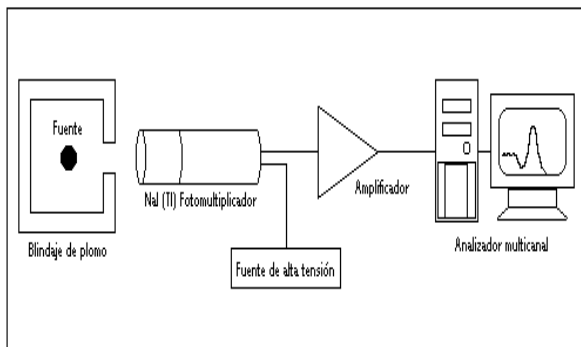


Figura 2. Dispositivo experimental.

Se obtuvieron así los espectros de las siguientes fuentes: ^{22}Na , ^{60}Co , ^{133}Ba , ^{137}Cs y ^{207}Bi . Se procedió luego a calibrar dichos espectros utilizando las energías de los rayos gamma tabuladas⁴ de los cinco elementos. Estas energías se muestran en la Tabla I.

Elemento	E_{γ} [keV]
^{133}Ba	356.0
^{22}Na	511.0
^{22}Na	1274.5
^{207}Bi	569.7
^{207}Bi	1063.7
^{137}Cs	661.7
^{60}Co	1173.2
^{60}Co	1332.5

Tabla I. Energías tabuladas de los rayos gamma de las fuentes radiactivas utilizadas.

III. RESULTADOS Y ANALISIS DE DATOS.

Un comentario sobre la calibración y la resolución en energía del detector.

La calibración se realizó utilizando las energías de los rayos gamma de la Tabla I y sus respectivos canales. La curva correspondiente se muestra en la figura 3.

La resolución en energía de un detector de este tipo se define⁵ como el ancho a la mitad del máximo del fotopico dividido por la abscisa correspondiente al punto medio. En este caso, resulta una resolución del 10%

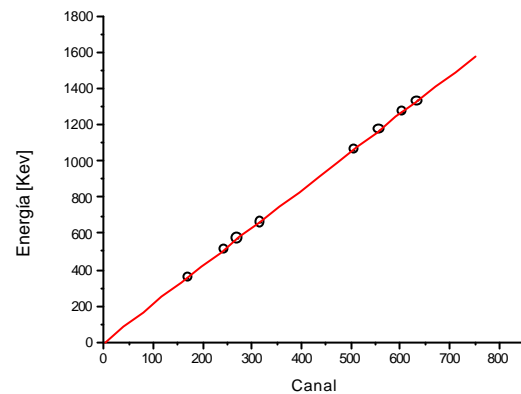


Figura 3. Recta de Calibración

Análisis de los espectros.

En la figura 4.a se muestra el espectro correspondiente al ^{133}Ba . Los picos 1 y 2 corresponden al fotopico y al borde Compton, respectivamente, del rayo gamma con una energía de 356 KeV. El pico 3, con una energía de 80 ± 10 keV, corresponde al pico de backscattering producido por el mismo rayo gamma.

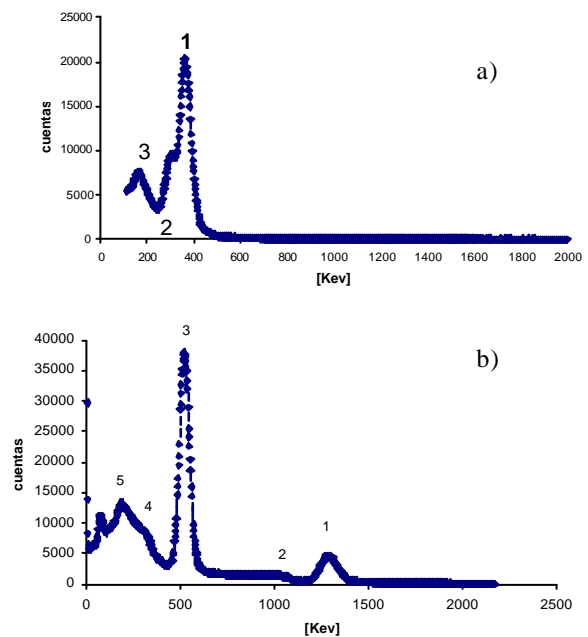


Figura 4. a) Espectro de ^{133}Ba . b) Espectro de ^{22}Na

En la figura 4.b se muestra el espectro correspondiente al ^{22}Na . Los picos 1 y 2 corresponden al fotopico y al borde Compton, respectivamente, del rayo gamma con una energía de 1274,5 KeV. Por otro lado, los picos 3 y 4 corresponden al fotopico y borde Compton, respectivamente, del rayo gamma, proveniente de radiación de aniquilación, con una energía de 511 KeV. El pico 5, con una energía de 183 KeV, corresponde al pico de backscattering producido por el mismo rayo gamma.

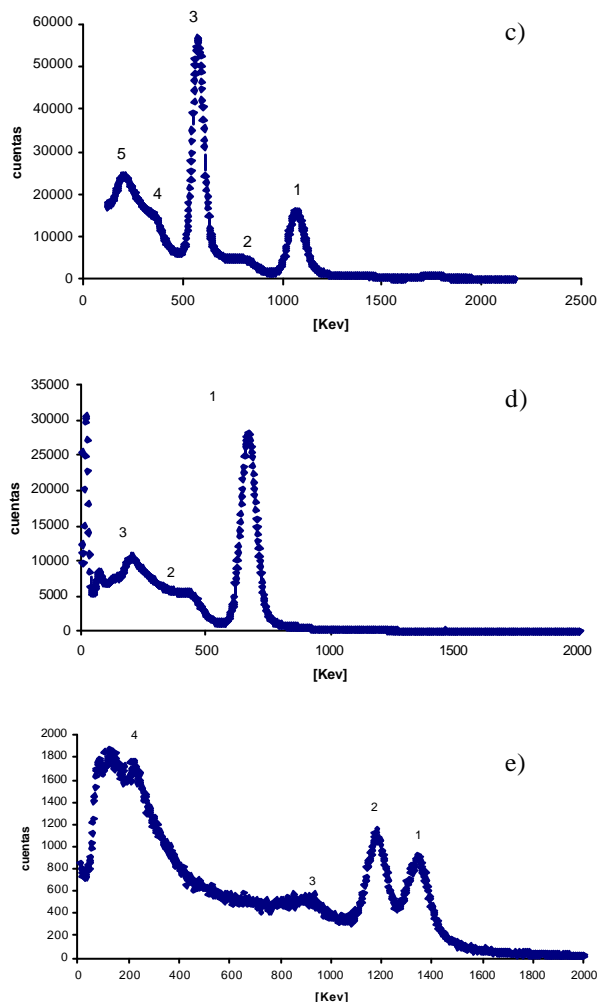


Figura 4. c) Espectro del ^{207}Bi . d) Espectro del ^{137}Cs e) Espectro del ^{60}Co .

En la figura 4.c se muestra el espectro correspondiente al ^{207}Bi . Los picos 1 y 2 corresponden al fotopico y al borde Compton, respectivamente, del rayo gamma con una energía de 1063,7 KeV. Por otro lado, los picos 3 y 4 corresponden al fotopico y borde Compton, respectivamente, del rayo gamma, proveniente de radiación de aniquilación, con una energía de 569,7 KeV. El pico 5, con una energía de 71 KeV, corresponde al pico de backscattering producido por el mismo rayo gamma.

En la figura 4.d se muestra el espectro correspondiente al ^{137}Cs . Los picos 1 y 2 corresponden al fotopico y al borde Compton, respectivamente, del rayo gamma con una energía de 661,7 KeV. La referencia 3 de la misma figura, con una energía de 206 keV, corresponde a un

pico de backscattering producido por el mismo rayo gamma.

En la figura 4.e se muestra el espectro correspondiente al ^{60}Co . Los picos 1 y 2 corresponden a los fotopicos de los rayos gamma con energías de 1332,5 y 1173,2 KeV, respectivamente. El pico 3 es el borde Compton correspondiente al rayo gamma con una energía de 1173,2 KeV. Por ultimo, la referencia 1, con una energía de 221 KeV, corresponde a un pico de backscattering producido por el mismo rayo gamma.

Medición del borde Compton.

El espectro mostrado en las figuras 1.b o 1.c se basa en la suposición de que el efecto Compton involucre electrones libres. Sin embargo, la existencia de la ligadura con el núcleo produce efectos medibles sobre la forma del continuo Compton. Ellos consisten en un redondeamiento del pico en el continuo cerca de su extremo derecho y la introducción de una pendiente finita en la caída abrupta del borde Compton, como puede verse en cualquiera de los espectros obtenidos (figuras 4). Luego, se impone la necesidad de utilizar un criterio para la ubicación de los bordes Compton. El criterio utilizado⁶ fue tomar como localización del verdadero borde el centro de la pendiente. Los valores obtenidos de la ecuación 1 así como los medidos se muestran en la Tabla II.

Cinemática del efecto Compton.

Elemento	T medido [Kev]	E _c Teórica [Kev]
^{133}Ba	213 ± 10	214
^{22}Na	365 ± 10	351
^{22}Na	1057 ± 10	1065
^{207}Bi	414 ± 10	401
^{207}Bi	869 ± 10	868
^{137}Cs	487 ± 10	487
^{60}Co	977 ± 10	963

Tabla II. Energías medidas y predichas por la teoría de los bordes Compton de las fuentes radiactivas utilizadas. Tener en cuenta que para el cálculo de la teórica usando como masa en reposo el valor de 511 KeV

En la figura 5 se aprecia la energía cinética del electrón medida (borde Compton) en función de la energía del fotón gamma. El ajuste realizado por la ecuación 8 determina el valor de la masa en reposo del electrón $m_0c^2=(490 \pm 7)$ KeV. La correlación obtenida en este caso fue de 0.999.

En la figura 6 se representa la masa del electrón (obtenida de la ecuación 5, calculo clásico) en función de su energía cinética. Vemos que estos puntos pueden ser ajustados por una recta, donde la ordenada al origen es la masa en reposo del electrón. De esta manera, se obtuvo $m_0c^2=(460 \pm 10)$ KeV, donde la pendiente de la recta resulto 0.54 ± 0.01 .

Por otro lado, se realizo un promedio ponderado de los valores de la masa en reposo del electrón obtenidos a partir de la ecuación 7 (figura 7). Se obtuvo así $m_0c^2=(490 \pm 13)$ KeV.

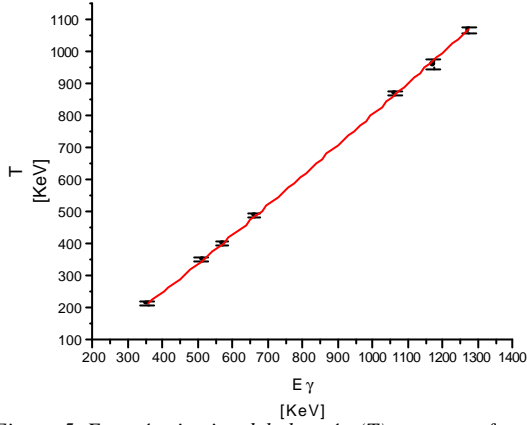


Figura 5. Energía cinética del electrón (T) como una función de la energía del fotón gamma (E_γ). La línea es un ajuste a los valores de la ecuación 8

Se calculo, utilizando la ecuación 9, los valores de \mathbf{b} y se grafico pc en función de β . Este gráfico debería comportarse asintóticamente cuando el valor de \mathbf{b} se aproxima a 1. Como vemos en la figura 8 esto aparenta suceder, por lo que para comprobarlo se ajustan los puntos a la ecuación del impulso relativista $pc = \mathbf{g}m_0c^2$ recordando que $\mathbf{g} = 1/\sqrt{1-\mathbf{b}^2}$.

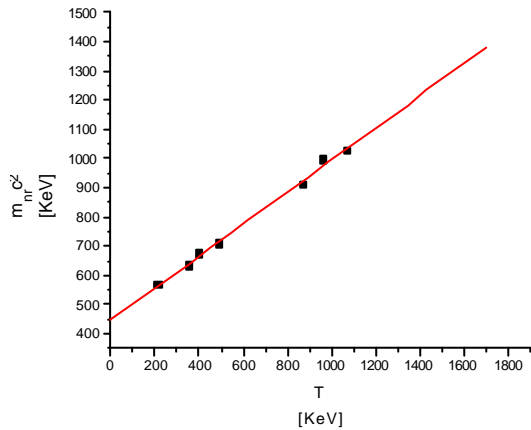


Figura 6. Masa clásica obtenida a partir de la ecuación 5 y la correspondiente aproximación por una recta de pendiente 0.54 ± 0.01 y ordenada al origen de 460 ± 10 KeV

Siguiendo con el análisis relativista, los valores de γ (obtenidos de la ecuación 10) en función de β están graficados en la figura 9. Nuevamente se observa una asíntota en 1. Haciendo un ajuste por la ecuación teórica $\gamma = (a + b\beta^2)^{-1/2}$ se obtiene que $a = 0.9998 \pm 0.0001$ y $b = -0.9989 \pm 0.0005$.

IV. CONCLUSIONES

El experimento realizado provee una convincente demostración experimental de la necesidad de un tratamiento relativista de la relación entre la energía y el momento de los electrones dispersados en una interacción Compton. A partir de la ecuación de la recta

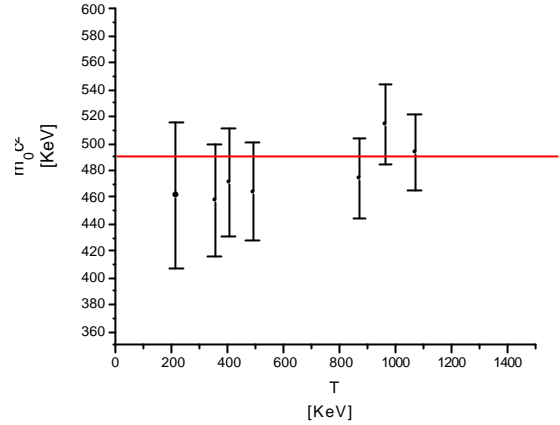


Figura 7. Masa relativista donde los valores fueron calculados a partir de la ecuación 7. Haciendo un promedio ponderado se obtiene el valor de 490 ± 7 KeV

obtenida experimentalmente para la masa clásica (figura 6) se llega a la expresión relativista para la energía total (ecuación 6) en la siguiente forma : cuando los valores obtenidos de $m_{hr}c^2$ a partir de la ecuación 5 son graficados como función de T , figura 6, es inmediatamente obvio que $m_{hr}c^2$ no es constante. Pero el resultado mas sorprendente es que, dentro de los errores experimentales, la dependencia con T es lineal con una pendiente de $1/2$. Además, la ordenada al origen (460 ± 10 KeV) es semejante al valor de la masa en reposo m_0c^2 conocida ($=511$ KeV).

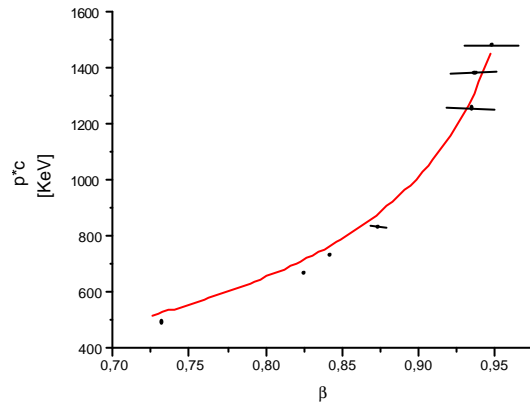


Figura 8. Valores del impulso relativista en función de \mathbf{b} con sus correspondientes barras de error en el valor de \mathbf{b} (en el caso del valor de pc el error se encuentra dentro del ancho del punto). Se aprecia que para valores cercanos a uno el impulso tiene una asíntota.

Reemplazando el lado izquierdo de la ecuación 5 con este resultado experimental, $m_0c^2 + T/2$, resulta :

$$(pc)^2 = 2Tm_0c^2 + T^2$$

La suma de $(m_0c^2)^2$ para completar cuadrados resulta en la ecuación 6, que era lo que queríamos mostrar.

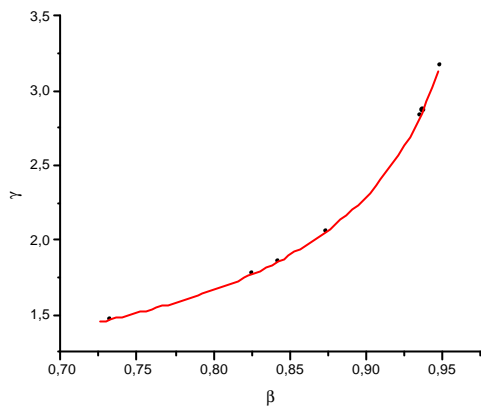


Figura 9. Representación de los valores de γ en función de β

A su vez, de la ecuación 6 se obtiene la masa en reposo del electrón en base a los datos experimentales de bordes Compton y energía de fotopico resultando, de acuerdo a la predicción relativista, independiente de la energía cinética como muestra la fig 7.

Asimismo, se muestra claramente la dependencia del momento y γ con β corresponde a la predicha por las ecuaciones relativistas $pc = \beta m_0 c^2$ y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, respectivamente (figuras 8 y 9).

Los valores obtenidos para la masa en reposo del electrón presentan diferencias significativas con el valor conocido de 511 KeV. Estas diferencias provienen del hecho de que el valor medido del borde Compton presenta, a su vez, diferencias con los valores predichos por la teoría (Tabla II); diferencias que se deben, no a la resolución en energía del detector (que es del orden de 2keV), sino a las dificultades para localizar el citado borde Compton. Mientras en la bibliografía⁵ utilizan un método de simulación estadística (Monte Carlo) para determinarlo, debimos, como contraparte, limitarnos a utilizar la regla mnemotécnica que surge como resultado de la aplicación de este método, es decir, tomar como localización del borde el centro de la pendiente.

Un comentario acerca de los valores obtenidos para la masa en reposo del electrón: observemos que el error de dicha masa encontrada del ajuste en la figura 6 es más grande que el error calculado en el ajuste de la figura 5. La razón es que, en el caso de la figura 6 se ajustan dos parámetros y solo uno en el otro caso. El parámetro extra, la pendiente de la figura 6, define la relación energía-momento en relatividad especial (ecuación 6). El otro ajuste supone que la relatividad es la teoría correcta y así la precisión estadística en las medidas aparece en el valor ajustado de las masas.

Por ultimo mencionemos que los espectros obtenidos coinciden, dentro de lo esperado, con la caracterización realizada en la introducción: cada rayo gamma de una dada energía presenta un fotopico con sus correspondientes borde Compton y pico de backscattering (producido por el encapsulamiento de la fuente).

¹R. D. Evans, *The atomic nucleus*, Editorial McGraw Hill, New York-London(1955), capítulo 23.

²G. Knoll, *Radiation detection and measurement*, Editorial John Wiley & Sons, New York, 1978, capítulo 10.

³A.P. French, *Relatividad Especial*, Ed.Reverté, pag 23

⁴Lederer, Hollander y Perlman, *Table of radiosotopes*, Editorial John Wiley&Sons, New York, 1967.

⁵W. B. Mann y S. B. Garfinkel, *Radioactividad y su medida*, Editorial Reverte Mexicana, México(1968), pagina167.

⁶P. L. Jolivette y N. Rouze, *Compton scattering, the electron mass and relativity : A laboratory experiment*, Am. J. Phys. **62** (1994), page 266.