

Ondas Acústicas en una Caja Prismática

M. Eugenia Capoulat.- Alejandra D. Romero.
Laboratorio de Física 5 – Dto. de Física – FCEyN – U.B.A. – 2005.

Resumen. *Un generador de funciones, un osciloscopio, un parlante y un micrófono, permiten determinar en forma directa y de manera sencilla las frecuencias de resonancia de una caja prismática. Comparando los valores obtenidos con los que predice la teoría, hemos determinado la velocidad del sonido $C_s = (352 \pm 2) \text{m/s}$.*

I. Introducción.

El estudio de las ondas estacionarias dentro de una cavidad, es uno de los problemas paradigmáticos de la física. Este modelo se utiliza en muchas áreas, como por ejemplo en la mecánica cuántica, donde el problema de encontrar los niveles de energía de una partícula confinada en un recinto es formalmente idéntico al problema de encontrar las frecuencias naturales de oscilación de un gas dentro de una caja con paredes rígidas. Del mismo modo, en electromagnetismo, encontrar las longitudes de onda permitidas dentro de una cavidad perfectamente conductora se resuelve de manera idéntica a los dos casos anteriores. En los tres casos, aunque se trata de sistemas físicos diferentes el punto de coincidencia reside en que su evolución está gobernada por una Ecuación de Ondas, que junto con las condiciones geométricas del recinto, imponen una cuantización a las frecuencias, longitudes de onda o niveles de energía según sea el caso. En esta ocasión, nos limitaremos a estudiar el caso acústico. Para esto, consideremos una caja prismática de dimensiones A , B y C (figura 1). La presión del aire contenido en la caja, debe satisfacer la Ecuación de Ondas^{i,ii} (1.1), con las condiciones de contorno (1.2). Estas condiciones de contorno se refieren a la condición de extremos libres, es decir, a la condición de máximo o mínimo en las paredes de la caja.

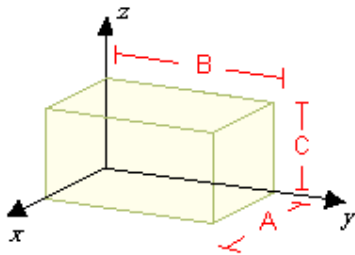


Figura 1: Caja prismática de lados A , B , y C

$$\nabla^2 p(\vec{r}, t) + \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.1)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (1.2)$$

Resolviendo (1.1) e imponiendo (1.2), la presión dentro de la caja será:

$$p(\vec{r}, t) = A \cdot e^{i\omega t} \cdot \cos\left(\frac{n_1 \pi}{A} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n_2 \pi}{B} y\right) \cdot \cos\left(\frac{n_3 \pi}{C} z\right) \quad (1.3)$$

donde n_1, n_2, n_3 son números naturales. Es fácil ver que (1.3) satisface las condiciones de contorno (1.2) sí:

$$f = \frac{C_s}{2} \sqrt{\left(\frac{n_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{C}\right)^2} \quad (1.4)$$

Las frecuencias que verifican la relación (1.4), denominadas *frecuencias naturales de oscilación*, son las únicas permitidas dentro de la caja. Es decir, la cavidad sólo resonará si se excita al gas de la caja con alguna de las frecuencias de la relación (1.4). Los números n_1, n_2, n_3 caracterizan el *modo normal* asociado a cada frecuencia natural de oscilación.

En las cavidades reales, cuyas paredes no son perfectamente rígidas, es posible confinar ondas cuya frecuencia difiere levemente de alguna de las frecuencias naturales de oscilación. Es decir, alrededor de cada frecuencia determinada por (1.4), existe un rango posible de frecuencias de vibración del gas dentro de la caja. Además, la absorción de energía en la caja lleva a que no tengamos una única frecuencia posible sino una *campana de resonancia* centrada en la frecuencia natural y cuyo ancho puede darnos una idea de la disipación de energía de nuestra cavidad real en cuestión. Esto se evalúa mediante el *factor de calidad* Q , que define una relación entre la energía de vibración del gas contenido en la caja y las pérdidas que se producen en las paredes de la cavidad, por el hecho de no ser ideales. Cálculos elementales permiten relacionar el factor de calidadⁱⁱⁱ con el ancho de la campana de resonancia según la expresión (1.5):

$$Q = \frac{\text{energía contenida en la caja}}{\text{energía perdida en las paredes}} = \frac{f}{\Delta f} \quad (1.5)$$

donde f es una de las frecuencias naturales y Δf es el ancho de la campana de resonancia cuando la amplitud de vibración decae a la mitad de su valor máximo. Vemos de la (1.5) que para cavidades ideales ($\Delta f = 0$), el factor de calidad es infinito, esto implica que no hay pérdida de energía.

En la experiencia que presentamos, nos proponemos encontrar directamente las frecuencias naturales de oscilación de una cavidad prismática y comparar los resultados con los valores que predice la ecuación (1.4). Una vez identificada cada resonancia con su correspondiente modo normal n_1, n_2, n_3 , determinaremos la velocidad del sonido C_s así como también, el ancho de la campana de resonancia para los primeros modos normales.

II. Dispositivo Experimental.

El montaje del dispositivo se muestra en la figura 2. Utilizamos una caja de madera de 65cm x 50.3cm x 25.2 cm, colocando en dos de sus caras opuestas, un par emisor-receptor (parlante y micrófono). Conectamos al parlante un generador de funciones digital y al micrófono un amplificador lock-in a fin de amplificar y limpiar la señal de salida. Conectamos también, el generador de funciones al lock-in a fin de proveer de una señal de referencia de igual frecuencia que la que se quiere amplificar (señal de

salida). Visualizamos la señal amplificada y la del generador en un osciloscopio de dos canales.

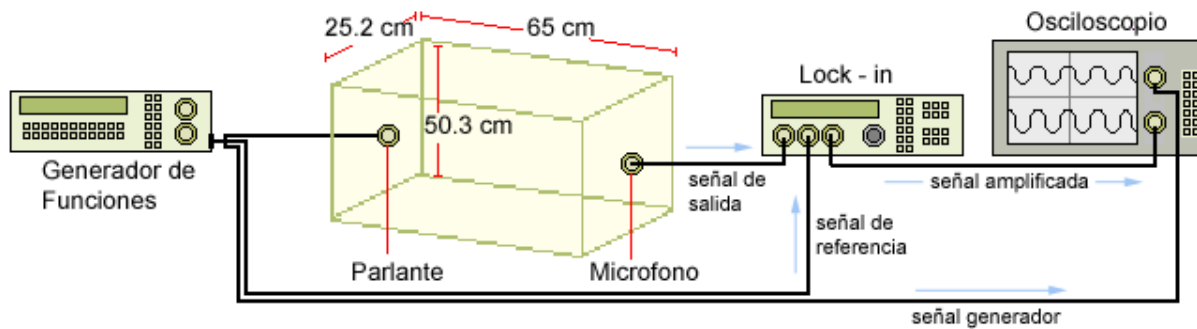


Figura 2: Esquema del dispositivo experimental utilizado para determinar los modos normales de oscilación de una caja prismática de 65cm x 50.3cm x 25.2 cm.

Si la caja fuese una cavidad ideal, al variar la frecuencia de la señal del generador observaríamos en el osciloscopio una señal de amplitud no nula sólo cuando la frecuencia del generador coincide con alguna de las frecuencias de resonancia de la caja prismática. Dado que la caja utilizada es una cavidad real, esperamos observar en el osciloscopio una señal de salida cuya amplitud se incremente considerablemente cuando el generador emita una señal de frecuencia cercana a la resonancia. Determinamos, entonces, la frecuencia de resonancia, como aquella para la cual la amplitud de la señal de salida observada en el osciloscopio es máxima. Una vez encontrada, variamos levemente la frecuencia del generador alrededor del valor de resonancia hasta que la amplitud de la señal de salida cae a la mitad del valor en la resonancia. De esta forma, determinamos el ancho de la campana para los primeros modos normales.

Una vez encontradas las frecuencias de resonancia, comparamos los valores obtenidos con los correspondientes según (1.4) variando el parámetro C_S hasta lograr que los valores que predice la fórmula se correspondan con las frecuencias obtenidas experimentalmente. De éste modo, determinamos la velocidad del sonido como el valor de C_S para el cual mejor concuerdan los resultados teóricos con los experimentales.

III. Análisis y Resultados

Mediante el dispositivo experimental antes mencionado, obtuvimos las primeras 30 frecuencias de resonancia y su amplitud relativa. Al decir relativa nos referimos a la amplitud de salida del lock-in la cual está amplificada. A fines prácticos, no necesitamos la amplitud absoluta.

En la figura 3 se muestra un gráfico de la amplitud en función de la frecuencia. El error en la amplitud es de 0.05 V mientras que el error en la frecuencia es 5 Hz.

Podemos ver que la mayor amplitud corresponde al nivel fundamental.

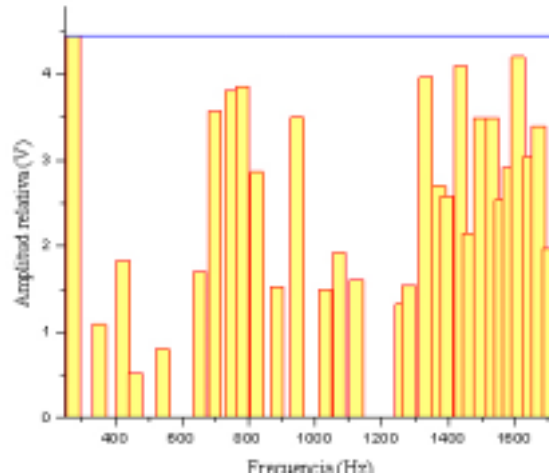


Figura 3: Amplitud relativa en función de la frecuencia para frecuencias obtenidas experimentalmente. Por amplitud relativa nos referimos a la amplitud amplificada por el lock-in.

Mediante un programa calculamos las frecuencias de los modos normales de la caja a partir de la longitud de sus lados, la fórmula (1.4) y una velocidad del sonido (C_S), que podíamos variar para obtener diferentes grupos de modos normales que dependen de esta magnitud física.

Luego buscamos la correspondencia entre las frecuencias obtenidas experimentalmente y las obtenidas teóricamente. A cada frecuencia experimental le fue asignada su correspondiente frecuencia teórica y, por consiguiente, su modo normal.

Este procedimiento fue realizado para varios valores de C_S .

Al realizar la correspondencia entre las frecuencias notamos que varios modos normales calculados en forma teórica tienen frecuencias de resonancia que difieren en el orden de la unidad o en el primer decimal. Estas frecuencias en la práctica no pueden diferenciarse unas de otras dado que la diferencia es del orden del error sistemático (5 Hz), por lo tanto solo podemos definir una.

También notamos frecuencias faltantes en los cálculos teóricos, en particular en los 1337 y 1373 Hz, que encontramos experimentalmente. Suponemos que este efecto se debe al hecho de que trabajamos con una cavidad real y que el ruido exterior no es despreciable. Estas resonancias no son características de la caja ya que no se predicen con el modelo teórico.

Además tenemos el caso opuesto, en el cual frecuencias calculadas en forma teórica no aparecen en la lista de frecuencias experimentales. Asignamos este efecto al hecho de que, como no variamos la posición del micrófono, podríamos haber estado midiendo un nodo del modo correspondiente a estas frecuencias faltantes.

En la figura 4 se muestra la relación entre las frecuencias teóricas y experimentales para una velocidad de 352 m/s. La relación es lineal con una pendiente de 0.99 ± 0.02 , sin considerar errores sistemáticos..

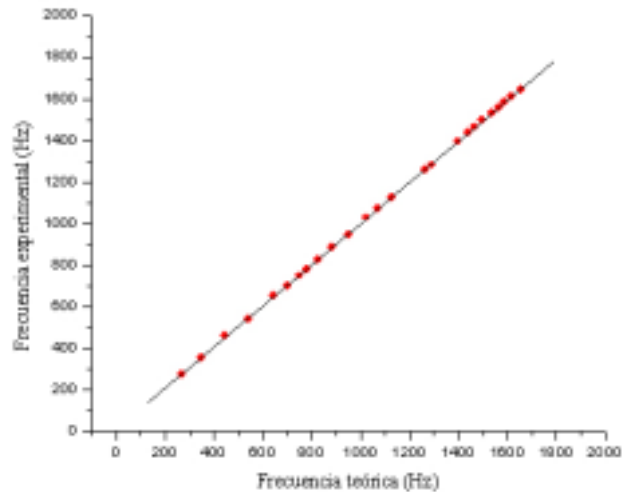


Figura 4: Frecuencia experimental en función de la frecuencia teórica para una velocidad de 352 m/s, la pendiente de la recta es de 0.99 ± 0.002 (en el error no se consideraron los errores experimentales).

A partir de estos datos se procedió a calcular la velocidad del sonido.

Calculamos varios grupos de frecuencias teóricas para varios valores de C_s y realizamos la correspondencia de cada grupo con los datos experimentales

Llamemos par teórico-experimental a cada grupo formado por las frecuencias obtenidas experimentalmente una vez asignada a sus correspondientes frecuencias teóricas calculadas para un dado valor de C_s .

Para cada par teórico-experimental calculamos el χ^2 usando la siguiente ecuación (1.6).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{f_i^e - y_i^t}{\delta f} \right)^2 \quad (1.6)$$

Donde δf es el error en la frecuencia (5 Hz), los superíndices e y t se refieren a la frecuencia experimental y su correspondiente frecuencia teórica y N es el número de elementos del grupo teórico-experimental.

El valor de C_s es el correspondiente al grupo teórico-experimental cuyo χ^2 es el mínimo.

Como se muestra en la figura 5, donde se grafica χ^2 en función de C_s , este valor corresponde a (325 ± 2) m/s con un $\chi^2 = 0.94$.

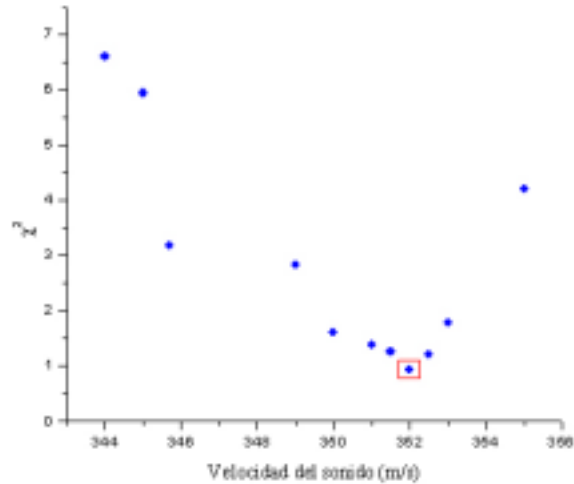


Figura 5: χ^2 en función de la velocidad del sonido. El valor correspondiente a la velocidad del sonido es (352 ± 2) m/s correspondiente al mínimo χ^2 .

Para calcular el error tomamos los valores de C_S correspondientes a χ^2+1 . Luego calculamos la distancia de C_S a estos valores y definimos el error como la máxima distancia obteniendo como resultado $\Delta C_S = 2$ m/s.

Analicemos ahora los datos correspondientes a los semianchos de las resonancias que no hemos utilizado aún.

Como sabemos, por tratarse de una cavidad real tendremos una campana de resonancia centrada en la frecuencia natural en lugar de una única frecuencia (figura 6).

Figura 6: curva representativa de la campana de resonancia para el nivel fundamental ($f = 266$ Hz).

En la tabla 1 se muestra el valor de la frecuencia de resonancia con su correspondiente semiancho y factor de calidad Q calculado a partir de la ecuación (1.5)

f (Hz)	Δf (Hz)	Q
266	16	16.6
422	27.4	15.5
542	9	30.2
645	12	54.5
698	3.6	191.4
781	4	195.3
826	16	51.6
885	10.5	84.3

Tabla 1: Frecuencias de resonancia con sus correspondientes semianchos Δf y factor de calidad Q .

Como podemos ver, el factor de calidad varía con la frecuencia alcanzando su máximo entre los 700 y los 800 Hz aproximadamente. El error en Q es del 50 % o más en los casos considerados. Lo que recomendamos es realizar un número mayor de mediciones para poder encontrar un perfil de Q en función de la frecuencia. Dado que contamos con pocos datos y muy dispersos no consideramos adecuado realizar un análisis gráfico. También notamos que en resonancias cercanas las respectivas campanas se solapaban, lo cual llevaba a un decaimiento más lento de la amplitud a medida que nos alejamos de la resonancia analizada.

IV. Conclusiones

A partir de las frecuencias de resonancia en una caja prismática medimos la velocidad del sonido dentro de la misma obteniendo como resultado (352 ± 2) m/s. Para ello utilizamos una base teórica sencilla y muy general cuyas bases se encuentran en la ecuación de ondas. Este método resulta eficiente a pesar de tener un montaje sencillo. Las discrepancias con el modelo teórico están dadas principalmente por las frecuencias faltantes, tanto teóricas como experimentales. Este efecto se debe a la incapacidad del dispositivo de definir frecuencias que difieren en el orden de los Hz, a la ubicación fija del micrófono y por supuesto al ruido de fondo. En el segundo caso recomendamos ubicar el micrófono en distintos lugares de la caja para evitar los nodos posibles en una posición fija.

Respecto al factor de calidad, no recomendamos este método ya que introduce mucho error en esta magnitud (50 % o más) dado el alto error en la frecuencia y la dificultad en la determinación de los semianchos debido al solapamiento de las campanas de resonancia consecutivas.

V. Referencias

ⁱ Eugene Hecht, Alfred Zajac, Óptica, Addison-Wesley Iberoamericana.

ⁱⁱ Física re-Creativa – Experimentos de Física usando nuevas tecnología - S. Gil y E. Rodríguez - Prentice Hall- Buenos Aires - Marzo de 2001. ISBN 987-9460-18-9

ⁱⁱⁱ J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley.