

Efecto Doppler de una fuente de sonido en un movimiento circular: análisis con y sin reflexiones

Diego Tanoni y Alejandro Krieger

e-mail: diegotanoni@yahoo.com.ar y alejandro_krieger@yahoo.com

Laboratorio 5, Dpto. Física, FCEyN; UBA- 2006

En este trabajo se estudia el efecto Doppler de una fuente de sonido en un movimiento circular, para el caso libre de reflexiones y para el caso de reflexiones producidas en una pared cercana. Para el caso del movimiento libre, se estudió como varían distintos parámetros de la curva de frecuencia en función del tiempo variando la distancia mínima entre la fuente de sonido y el micrófono y la frecuencia angular de giro de la fuente. Para el caso del experimento en las cercanías de una pared, se trataron las reflexiones con el método de las imágenes. Se observa un buen acuerdo entre la teoría y el experimento y podemos decir que el método de las imágenes es adecuado para tratar las reflexiones de una onda sonora en una pared.

I. Introducción

Cuando una fuente de sonido y un oyente están en movimiento relativo, la frecuencia del sonido oída por el oyente no es la misma que la frecuencia de la fuente f_0 . Este fenómeno, descrito por primera vez por el científico austriaco Christian Doppler, se llama efecto Doppler [1].

A continuación deduciremos una relación entre el cambio de frecuencia y las velocidades de la fuente y el oyente relativas al medio (usualmente aire). Consideremos el caso en que las velocidades de la fuente y el oyente están en la línea que los une y sea v_f y v_{oy} las componentes de velocidad al lo largo de esta línea para la fuente y el oyente respectivamente, relativas al medio. Escogemos como dirección positiva la dirección que va desde la fuente al oyente. La rapidez del sonido relativa al medio, c_s , siempre se considera positiva.

Consideremos primero el caso de una fuente estacionaria y un oyente en movimiento (Figura 1.1). La fuente emite una onda sonora con frecuencia f_0 . Las crestas de esta onda están separadas por una distancia λ igual a la longitud de onda $\lambda = c_s / f_0$. Si un oyente se mueve con velocidad $(-v_{oy})$ hacia la fuente estacionaria, las crestas que se acercan al oyente en movimiento tienen una velocidad de propagación relativa al oyente de $(c_s - v_{oy})$, así que la frecuencia con la que estas crestas llegan al oyente es

$$f_{oy} = \frac{c_s - v_{oy}}{\lambda} \quad (1.1)$$

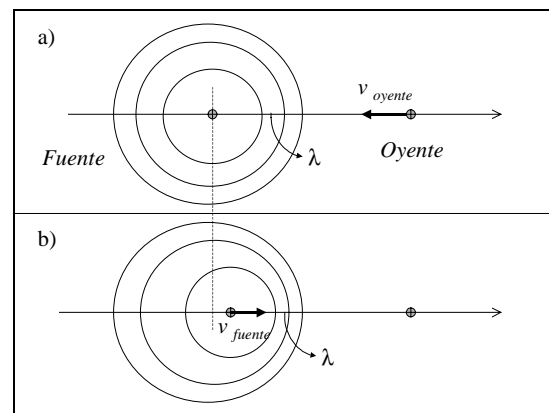


Figura 1.1: La frecuencia que escucha el oyente es distinta si a) el oyente se acerca a la fuente o b) la fuente se acerca al oyente. La dirección que va de la fuente al oyente se toma como positiva.

Así, un oyente que se mueve hacia la fuente ($v_{oy} < 0$) escuchará una frecuencia más alta que un oyente estacionario y un oyente que se aleja ($v_{oy} > 0$) escuchará una frecuencia más baja.

Supongamos ahora que la fuente también se mueve con velocidad v_f (Figura 1.1 b). La velocidad de la onda sonora relativa al medio (aire) sigue siendo c_s . Está determinada por las propiedades del medio y no cambia por el movimiento de la fuente. Pero la longitud de onda ya no es igual a c_s/f_0 . El tiempo de emisión entre un máximo y el siguiente es el período de la onda $T = 1/f_0$. Durante este tiempo la onda viaja una distancia $c_s T = c_s/f_0$ y la fuente se mueve una distancia $v_f T = v_f/f_0$. Como la longitud de onda es la distancia entre dos máximos sucesivos, la longitud de onda para una fuente en movimiento depende del desplazamiento relativo de la fuente y la onda y es

$$\lambda = \frac{c_s}{f_0} - \frac{v_f}{f_0} = \frac{c_s - v_f}{f_0} \quad (1.2)$$

Vemos que la longitud de onda no es la misma por delante y por detrás de una fuente móvil. Si la fuente se acerca al oyente, ($v_f > 0$) la longitud de onda es menor que en el caso de la fuente estacionaria, las crestas se juntan por delante de la fuente. Si la fuente se aleja del oyente ($v_f < 0$) la longitud de onda es mayor. Las ondas por delante y por detrás de la fuente se comprimen y estiran, respectivamente, por el movimiento de la fuente.

Si sustituimos esta ecuación en (1.1), obtenemos una expresión que incluye todas las posibilidades de movimiento de la fuente y del oyente, relativas al medio, a lo largo de la línea que los une

$$f_{oy} = \left(\frac{c_s - v_{oy}}{c_s - v_f} \right) f_0 \quad (1.3)$$

Si la fuente se acerca al oyente, $v_f > 0$ y la frecuencia f_{oy} es mayor que f_0 . Si el oyente se aleja de la fuente, $v_{oy} > 0$ y la frecuencia que percibe el oyente es menor que f_0 . Si tanto la fuente como el oyente están en reposo o tienen la misma velocidad relativa respecto del medio $f_{oy} = f_0$. Para el caso de la fuente en reposo, $v_f = 0$ y recuperamos el caso de la ecuación (1.1).

Si el oyente está en reposo respecto del medio, $v_{oy} = 0$, y podemos escribir

$$f_{oy} = \left(\frac{c_s}{c_s - v_f} \right) f_0 = \left(\frac{1}{1 - \frac{v_f}{c_s}} \right) f_0 \quad (1.4)$$

Si la velocidad de la fuente v_f es mucho menor que la velocidad del sonido c_s , podemos aproximar la ecuación (1.4) y escribir

$$f_{oy} \approx \left(1 + \frac{v_f}{c_s} \right) f_0 \quad (1.5)$$

II. Efecto Doppler para una fuente en movimiento circular

a) Caso sin reflexiones

Si tenemos una fuente de sonido en el extremo de una barra que gira con velocidad angular uniforme ω , la velocidad de la fuente que debemos considerar para analizar el efecto Doppler es la componente de v_f paralela a la dirección fuente-oyente que designaremos $v_{//}$. De la figura 2.1 puede verse que esta componente es

$$v_{//} = -v_f \text{sen}(\omega t + \beta) \quad (2.1)$$

donde $v_f = \omega r$ es la magnitud de la velocidad tangencial. El signo menos corresponde al hecho de que la fuente se está alejando del observador.

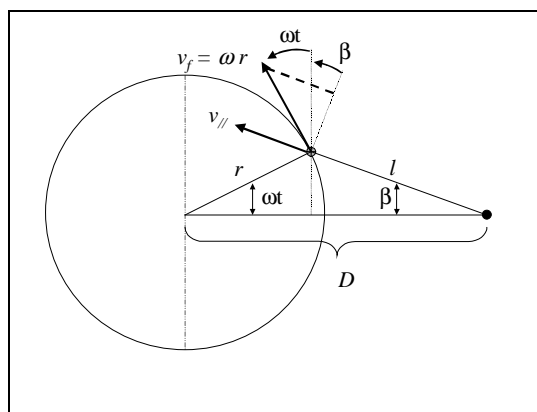


Figura 2.1: Diagrama de una fuente de sonido en un movimiento circular. La velocidad que debemos considerar para el efecto Doppler es la componente $v_{//}$ de la velocidad de la fuente v_f

Como se muestra en el Apéndice A, la ecuación (2.1) puede describirse como

$$v_{//} = -v_f \text{sen}(\omega t) \frac{D}{l} \quad (2.2)$$

donde d es la distancia del micrófono al centro de giro y l es la distancia desde el micrófono a la fuente $l^2 = D^2 + r^2 - 2 rD \cos(\omega t)$. Si llamamos α a la relación $\alpha = r / D$ podemos escribir la ecuación (2.3) como

$$v_{//} = -v \text{sen}(\omega t) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha - 2\alpha \cos(\omega t)}} \quad (2.4)$$

De la ecuación (2.1) se ve que a medida que la fuente se mueve en la trayectoria circular, $v_{//}$ alcanza su valor máximo y mínimo cuando $(\omega t + \beta) = \pm \pi/2$. En ese momento r y l son perpendiculares y entonces

$$\cos(\omega t) = \frac{r}{D} = \alpha \quad (2.5)$$

Esto significa que $v_{//}$ alcanza sus valores máximo y mínimo en los puntos donde la dirección fuente – micrófono es tangente a la circunferencia (Figura 2.2)

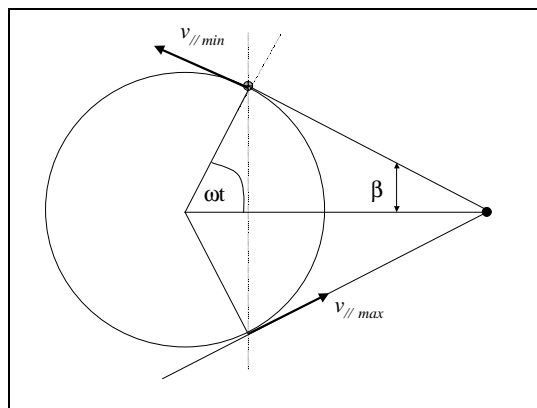


Figura 2.2: La velocidad $v_{//}$ alcanza sus valores máximos y mínimos en los puntos donde la dirección fuente-micrófono es tangente a la circunferencia.

Para encontrar cuál es el corrimiento de la frecuencia percibida por el oyente, podemos usar la aproximación dada por la ecuación (1.5), ya que en este caso la velocidad de giro v_f es mucho menor que la velocidad del sonido. Tenemos entonces

$$f_{oy} \approx \left(1 - \frac{v_f}{c_s} \operatorname{sen}(\omega t) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha - 2\alpha \cos(\omega t)}} \right) f_0 \quad (2.6)$$

La frecuencia máxima percibida por el oyente se produce en el momento en que $v_{//}$ es máxima. Esta frecuencia es $f_{max} = (1 + \omega r / c_s) f_0$ y la frecuencia mínima es $f_{min} = (1 - \omega r / c_s) f_0$, por lo que la máxima diferencia de frecuencia es

$$f_{max} - f_{min} = \Delta f = 2 \frac{\omega r}{c_s} f_0 \quad (2.7)$$

También podemos calcular el tiempo δ que transcurre para que la velocidad pase de su valor máximo a su valor mínimo. Usando la ecuación (2.5) vemos que

$$\frac{\ar \cos(\alpha)}{\omega} = t \quad (2.8)$$

Este es el tiempo que transcurre desde $t = 0$ hasta el momento que la velocidad es mínima, por lo que el tiempo δ buscado es dos veces ese valor

$$\frac{2 \ar \cos(\alpha)}{\omega} = \delta \quad (2.9)$$

Cuanto más lejos se encuentre el micrófono, más tiempo transcurrirá entre el máximo y el mínimo de frecuencia. Como caso extremo, si el oyente se encuentra en el infinito, este tiempo será de π/ω , la mitad del periodo T .

Por otro lado si el micrófono se encuentra sobre la trayectoria de la fuente, la diferencia de tiempo tiende a cero y se produce un salto instantáneo de la frecuencia, ya que la fuente se acerca con velocidad máxima y un instante después se aleja con la velocidad máxima (Figura 2.3)

Estas mismas conclusiones se obtienen analizando el problema desde el punto de vista de los puntos tangentes. De la Figura 2.3 se ve que si $d \rightarrow \infty$ la dirección fuente-oyente es tangente en los bordes superior e inferior de la trayectoria, mientras que si $d \rightarrow r$,

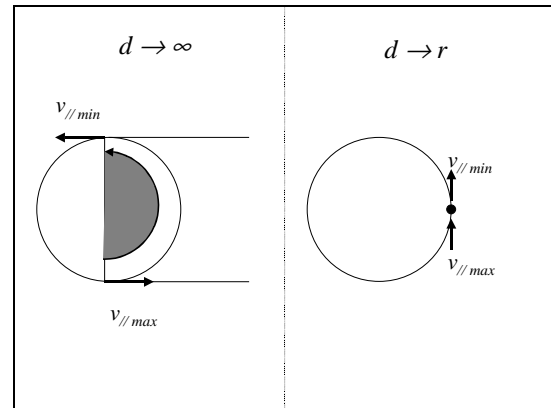


Figura 2.3: El tiempo δ entre la velocidad máxima y mínima depende de la distancia del micrófono y es igual a la mitad del periodo si el oyente se encuentra en el infinito y tiende a cero si el oyente se encuentra sobre la trayectoria de la fuente.

hay un solo punto tangente, lo que significa que la frecuencia se vuelve máxima e inmediatamente mínima.

b) Análisis considerando reflexiones

Si el experimento se lleva a cabo cerca de alguna pared, aparecerán junto con la señal de la fuente las reflexiones que se producen en esa pared.

Es posible tratar estas reflexiones con el método de las imágenes, considerando que las reflexiones son las señales de una fuente imaginaria ubicada al otro lado de la pared, girando en sentido contrario a la fuente real [2] (Figura 2.4)

En ese caso se trata de una fuente virtual de la misma frecuencia f_0 que la fuente real, que gira en sentido contrario al de la fuente real y cuyo centro de giro se encuentra más lejos del micrófono que el centro de la fuente real. Esta distancia D' es $D' = 2s + D$, por lo que el valor de α' para la fuente virtual es

$$\alpha' = \frac{r}{2s + D} \quad (2.10)$$

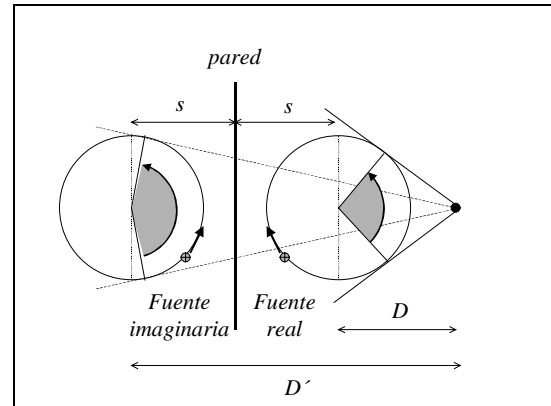


Figura 2.4: Es posible tratar las reflexiones de una pared con el método de las imágenes. El diagrama muestra la fuente real y una imaginaria ubicada del otro lado de la pared, girando en sentido contrario y ubicada más lejos del micrófono.

Por esta razón esperamos una señal de la fuente imaginaria que sea de menor intensidad y opuesta a la señal de la fuente real (ya que su sentido de giro es opuesto). Observando la figura 2.4 y la ecuación (2.9) también esperamos para la señal reflejada un δ' mayor, ya que la distancia al micrófono es mayor.

Si el modelo de las imágenes es el adecuado para tratar las reflexiones, las mediciones de frecuencia en función del tiempo deberían seguir la relación

$$f_{oy} \approx \left(1 + \frac{v_f}{c_s} \text{sen}(\omega t) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha' - 2\alpha' \cos(\omega t)}} \right) f_0 \quad (2.11)$$

Esta es la misma ecuación que la ecuación (2.6), sólo que el signo de la velocidad de la fuente ha cambiado y ahora usamos α' en lugar de α .

III. El experimento

El dispositivo experimental utilizado para esta experiencia consistió en una barra de (150 ± 1) cm de largo, en cuyo extremo se colocó una fuente de sonido (“chicharra”) alimentada con una batería de 9V (Figura 3.1)

El centro de la barra se colocó sobre el eje de una motor, cuya frecuencia de giro podía modificarse manualmente. La señal de la fuente se capturó utilizando un micrófono comercial conectado a la placa de sonido de una PC y se adquirió usando el programa de audio SoundForge

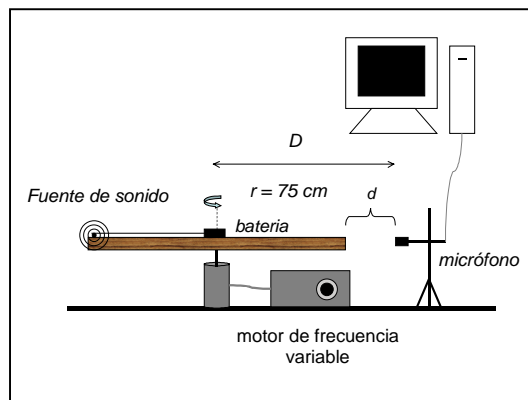


Figura 3.1 : Dispositivo experimental utilizado para estudiar el efecto Doppler de una fuente de sonido en un movimiento circular.

Con este programa podía adquirirse la amplitud de la señal del micrófono en función del tiempo y ver el espectro de frecuencias de la señal. El programa realizaba además un sonograma de la señal, que es un diagrama de la frecuencia en función del tiempo.

Realizamos varias mediciones modificando la distancia d (“distancia mínima”) para una frecuencia de giro constante. También hicimos mediciones para una distancia d fija modificando la frecuencia de giro. Finalmente acercamos todo el dispositivo a una pared e hicimos mediciones en esas condiciones.

IV. Resultados y Análisis

A continuación se muestra una parte del espectro de la señal de la fuente de sonido. Aquí se aprecia sólo uno de los picos, a la frecuencia de 5,3 KHz. El espectro completo presenta varios picos de intensidad en distintas frecuencias. Sin embargo, nuestro interés en esta práctica está centrado sólo en el pico mencionado, que es el de mayor intensidad, por lo que para el resto del trabajo se considerará que la frecuencia de la señal fue de 5,3 KHz. Cómo se evitan los demás picos de intensidad se comenta en la siguiente sección.

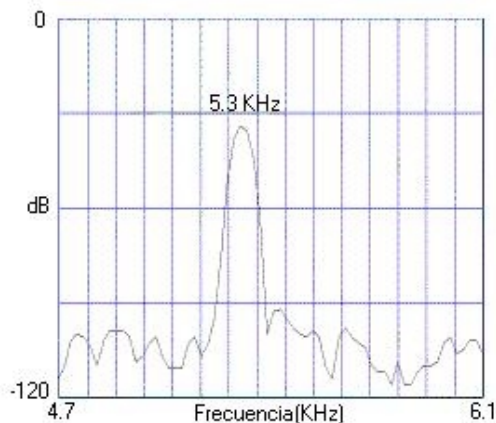


Figura 4.1: Espectro de la señal sonora en el rango de frecuencias de interés.

Sonogramas⁸

Como se ha visto, en el presente trabajo surgió la necesidad de determinar las frecuencias en función del tiempo, pero primero hay que entender que significa la frase *frecuencia en función del tiempo*. Como es sabido, en la naturaleza no existen ondas perfectamente monocromáticas (el problema ya surge teóricamente, debido a que una onda monocromática tendría energía infinita al no ser una función de cuadrado integrable), sino que se trata de los denominados trenes de onda con una determinada longitud espacial. Lo que se emplea en general para tratar estos temas es la transformada de Fourier, que es una función que depende de la frecuencia y esta directamente relacionada con la señal original (cada una se deduce de la otra). El problema que surge es que la transformada de Fourier implica el cálculo de una integral que va de tiempo menos infinito hasta tiempo más infinito y que contiene a la señal en todo este rango.

Para elaborar el sonograma,⁸ el programa calcula la transformada de Fourier en varios intervalos de tiempos finitos. Estos intervalos deben ser lo suficientemente grandes como para ser considerados como infinitos desde el punto de vista de la señal (una apreciación es que cuanto mayor sea el intervalo de tiempo de integración mejor será la resolución en frecuencia), y lo suficientemente pequeños como para que la fuente de donde se emite la señal no cambie apreciablemente de lugar. En nuestro experimento, este compromiso puede ser satisfecho en ambos extremos si la frecuencia de giro de la fuente es mucho menor que la frecuencia de la señal sonora, hecho que se verifica ampliamente debido a que la fuente giró con frecuencias inferiores a los 20 Hz, mientras que la señal sonora estudiada fue de una frecuencia superior a los 5 KHz.

Los sonogramas son un mapa que contiene en un eje al tiempo y en otro a la frecuencia. En dicho mapa una escala de colores indica la intensidad de cada frecuencia en la transformada de Fourier en cada intervalo de tiempo. La escala de colores con las intensidades correspondientes esta dada en la parte inferior del sonograma. Debido a que la frecuencia sonora es alta, los intervalos de tiempo que pueden tomarse para satisfacer ambas relaciones de compromiso son lo suficientemente pequeños como para que en el sonograma la escala de tiempo se observe como si se tratase de valores continuos.

La siguiente imagen (Figura 4.2) muestra un sonograma en un intervalo de frecuencias más amplio del que se estudio (0 a 10 KHz). Este sonograma correspondió a una distancia mínima entre micrófono y señal de 3 cm, un radio de giro de la fuente de 75 cm y una frecuencia angular de giro de 13,5 Hz.

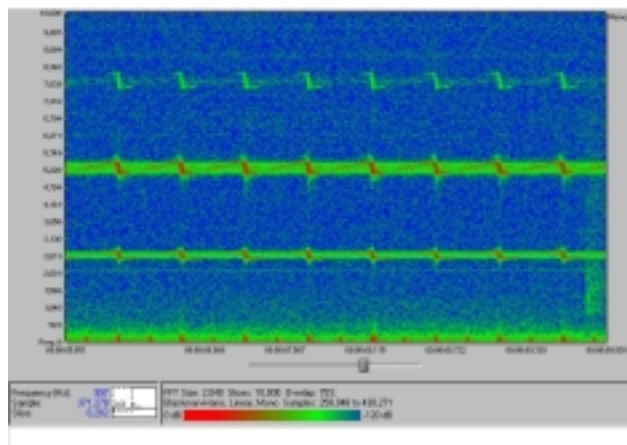


Figura 4.2: Sonograma mostrando un amplio rango de frecuencias, más allá de las de interés.

Como se aprecia en la figura anterior, hay varias bandas de alta intensidad. Cada una de ellas corresponde a un pico distinto en el espectro de la señal en reposo. De esta manera, al realizar las mediciones correspondientes a la frecuencia deseada, sólo se tomó en cuenta un rango de frecuencias alrededor de los 5,3 KHz, que es la frecuencia pico mostrada en la sección anterior. Los demás sonogramas que se muestren sólo estarán en dichos intervalos. Además, en las escalas de tiempo, frecuencia, e intensidad sólo se mostrará el sentido en que las magnitudes aumentan.

Estos sonogramas se emplearon para obtener la frecuencia en función del tiempo, ya que los máximos de intensidad indican como varía con el tiempo la señal correspondiente al pico de 5,3 KHz en reposo. Resumiendo, cuando se hable de frecuencia en función del tiempo, lo que se está indicando son los valores de frecuencia de máxima intensidad para cada tiempo; además, en todas las expresiones empleadas se tomará como frecuencia sonora a 5,3 KHz.

La siguiente figura muestra un sonograma cuando el sistema está en reposo. Observar que, como es de esperar, el sonograma no varía con el transcurso del tiempo. La línea de mayor intensidad corresponde a las frecuencias cercanas a los 5,3 KHz.

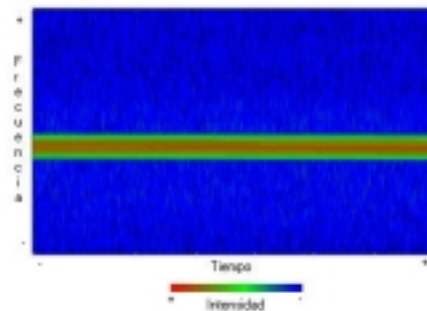


Figura 4.3: Sonograma correspondiente a la fuente en reposo.

a) Análisis de los resultados al variar la distancia d

Según el comentario hecho para la figura 2.3, al incrementar la distancia mínima d entre el micrófono y la fuente (de las figuras 2.1 y 3.1 se ve que $D = r + d$), el intervalo de tiempo entre una frecuencia máxima y otra mínima aumenta debido a que es mayor el camino que recorre la fuente entre estos dos puntos (considerando fija la frecuencia de giro), resultando que cuando la distancia tiende a infinito, el intervalo de tiempo entre estos dos puntos tiende a la mitad del periodo de giro de la fuente. Los siguientes sonogramas muestran este comportamiento, siendo en todos los casos la frecuencia angular de giro igual a 13,5 Hz y el radio de giro de la fuente de 75 cm.

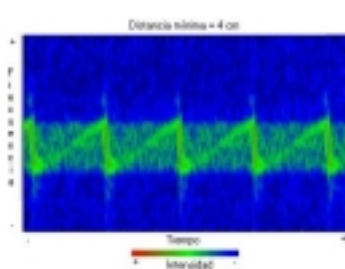


Figura 4.4a

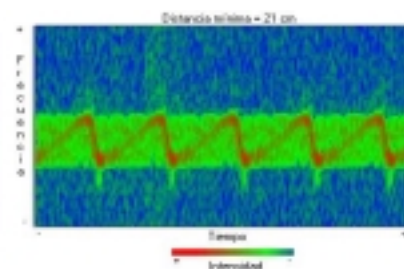


Figura 4.4b

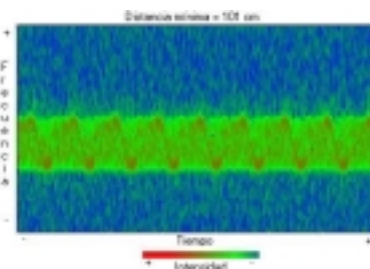


Figura 4.4c

Figuras 4.4a, 4.4b, 4.4c: Sonogramas correspondientes a distancias mínima entre la fuente y el micrófono de 4 cm, 21 cm y 81 cm respectivamente.

Los gráficos, de izquierda a derecha, tienen distancia mínima d de 4 cm, 21 cm y 81 cm respectivamente. Se aprecia que a medida que aumenta la distancia d el comportamiento predicho anteriormente se verifica. En la última figura, el intervalo de tiempo entre una frecuencia máxima y otra mínima (lo llamaremos, de aquí en más, intervalo de tiempo entre frecuencia máxima – mínima δ) es comparable al intervalo entre una mínima y otra máxima (lo llamaremos, de aquí en más, intervalo de tiempo entre frecuencia mínima – máxima). La suma de ambos intervalos da un periodo de giro.

A continuación se mostrará un gráfico de las mediciones del intervalo de tiempo entre frecuencia máxima – mínima δ en función de la distancia D , comparando los resultados obtenidos con los predichos teóricamente. Los datos experimentales se obtuvieron como sigue: se registraron cuatro frecuencias máximas con las frecuencias mínimas que les seguían inmediatamente, y se tomo las diferencias de tiempo entre ellas (el tiempo entre cada frecuencia máxima con el tiempo de la frecuencia mínima que le seguía inmediatamente), obteniéndose así cuatro intervalos de tiempo. El promedio entre estos cuatro valores fue el intervalo de tiempo que se colocó en el gráfico, siendo la desviación estándar el error. La curva teórica se realizó utilizando la expresión (2.9), siendo la frecuencia angular de giro de 13,5 Hz y el radio de giro de la fuente de 75 cm. Se muestra en el gráfico el valor de χ^2 , que mide la calidad del ajuste de los datos experimentales y las predicciones teóricas (ver Apéndice B, ecuación B.5). Para hacer las mediciones sobre el sonograma, en ésta y en las demás secciones donde fue necesario, se empleó el programa de computación *xyExtract*,⁷ el cual permite obtener coordenadas de puntos de una imagen luego de fijar referencias en cada uno de los ejes.

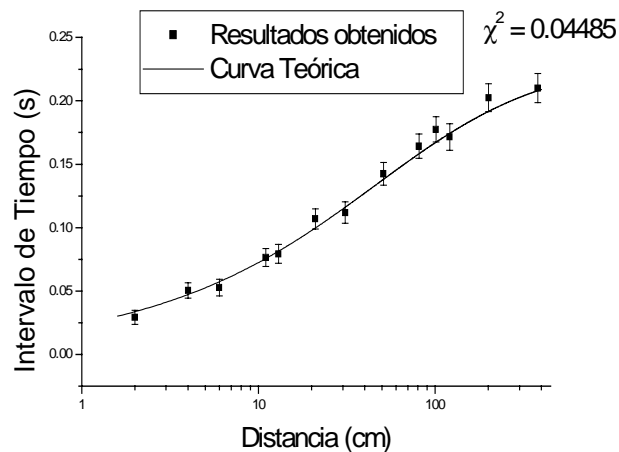


Figura 4.5: Intervalo de tiempo δ entre frecuencia máxima – mínima en función de la distancia D . Comparación entre resultados experimentales y predicción teórica dada por la ecuación (2.9)

Se aprecia una buena concordancia entre valores teóricos y experimentales dentro del rango del error estadístico.

b) Análisis de los resultados al variar la frecuencia de giro ω

Los siguientes gráficos muestran por un lado la variación del intervalo de tiempo δ entre frecuencia máxima – mínima al variar la frecuencia angular de giro ω y por el otro la diferencia entre estas frecuencias, también al variar la frecuencia angular de giro ω para una distancia d constante. Los

valores del intervalo de tiempo con sus respectivos errores se obtuvieron de igual forma que lo que se lo hizo en la sección anterior.

La diferencia de amplitud es la diferencia entre la frecuencia máxima y la siguiente mínima. Los resultados se calcularon de igual forma que en los intervalos de tiempos, o sea, se hizo el promedio entre cuatro de estas diferencias de frecuencia y se tomó como error a la desviación estándar. La curva de diferencia de frecuencia se realizó debido a que esta magnitud varía al variar la frecuencia de giro, y no así, al modificar la distancia mínima entre la fuente y el micrófono.

Las curvas teóricas se realizaron utilizando las expresiones (2.7) y (2.9). La distancia mínima d entre la fuente y el micrófono fue de 3 cm y el radio de giro de la fuente de 75 cm por lo que la distancia D fue de 78cm. Se muestra en los gráficos el valor de χ^2 relacionando los resultados experimentales con las predicciones teóricas.

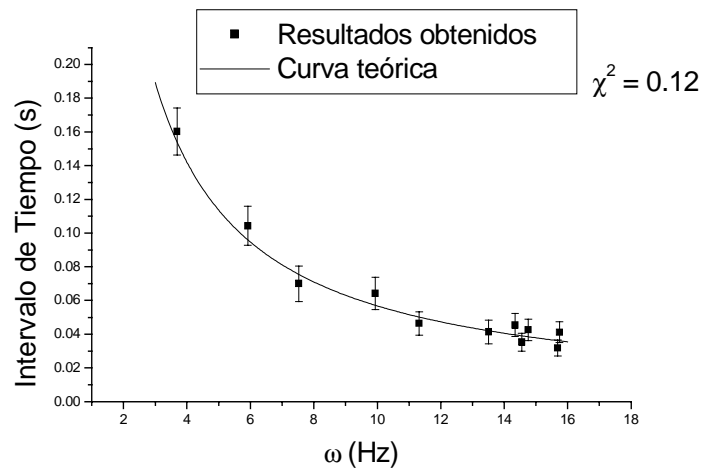


Figura 4.6: Intervalo de tiempo δ entre frecuencia máxima – mínima en función de la frecuencia angular de giro. Comparación entre resultados experimentales y predicción teórica dada por la ecuación (2.9)

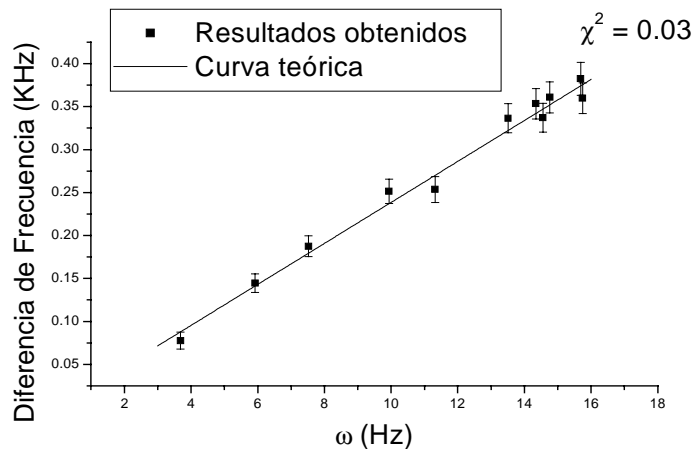


Figura 4.7: Diferencia entre frecuencia máxima y mínima en función de la frecuencia angular de giro. Comparación entre resultados experimentales y predicción teórica dada por la ecuación (2.7)

Nuevamente se observa una buena concordancia entre las curvas teóricas y los resultados experimentales, siempre dentro del error estadístico.

c) Curvas de frecuencia en función del tiempo

Se realizaron las curvas de frecuencia en función del tiempo para distancias mínimas entre fuente y micrófono de 6 cm, 31 cm, 51 cm y 81 cm. Se ajustó cada una de ellas con su correspondiente curva teórica, dada por la ecuación (2.6).

Sin embargo, los resultados teóricos y experimentales mostraron una pequeña discrepancia. Para encontrar la frecuencia de giro que mejor ajustaba los datos experimentales, se realizó la minimización de la función χ^2 variando el parámetro ω (ver Apéndice B, ecuación B.2). Se hizo esto sólo cuando la distancia mínima fue de 6 cm, encontrándose como frecuencia angular de giro a $13,4 \pm 0,4\text{Hz}$. Esta misma frecuencia se empleó luego para ajustar las demás curvas. Los gráficos muestran además los correspondientes valores de χ^2 .

Inicialmente, con objetivos ilustrativos, se mostrará el sonograma de donde se obtuvieron los puntos superpuesto con la curva teórica en el caso en el cual la distancia mínima fue de 6 cm.

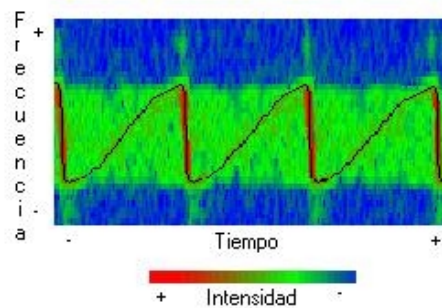


Figura 4.8: Sonograma en el caso de una distancia mínima entre fuente y microfono de 6 cm. Superpuesto en línea negra se muestra la curva teórica.

A continuación se muestran los gráficos en las distancias indicadas de frecuencia en función del tiempo con los puntos obtenidos empleando el programa *xyExtract* superpuestos a las correspondientes curvas teóricas.

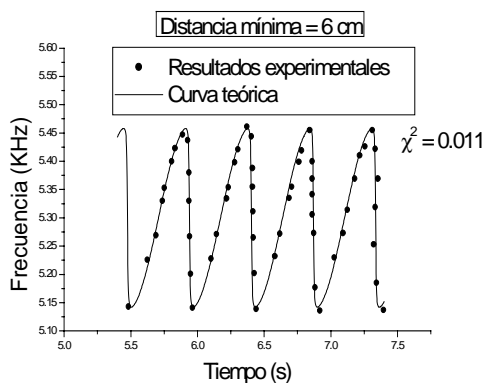


Figura 4.9a

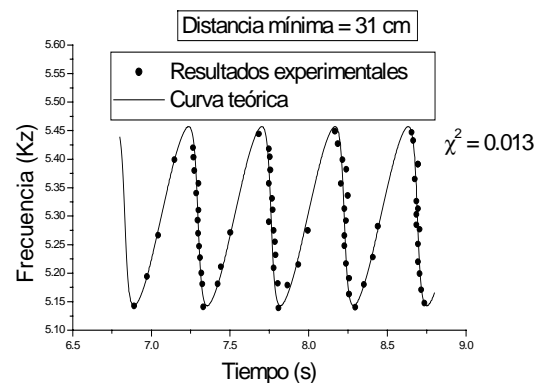


Figura 4.9b

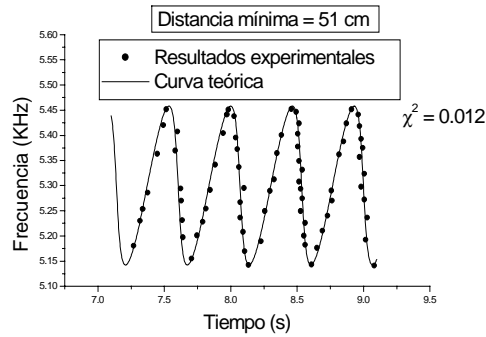


Figura 4.9c

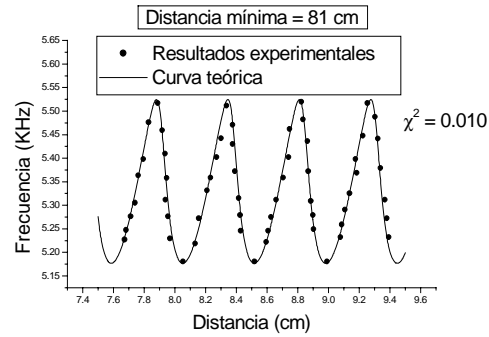


Figura 4.9d

Figuras 4.9a, 4.9b, 4.9c, 4.9d. Frecuencia en función del tiempo para distancias mínimas entre fuente y micrófono de 6cm, 31 cm, 51 cm y 81 cm respectivamente. Comparación entre resultados experimentales y predicción teórica dada por la ecuación (2.6)

Se aprecia una muy buena concordancia entre los valores experimentales y las curvas teóricas. También se aprecia aquí que el intervalo de tiempo δ entre frecuencia máxima – mínima aumenta al aumentar la distancia, siendo muy parecido el intervalo entre frecuencia máxima – mínima con el intervalo entre frecuencia mínima – máxima cuando la distancia mínima fue de 81 cm.

d) Análisis de las reflexiones utilizando el método de las imágenes

En esta sección se utiliza el método de imágenes para interpretar las reflexiones que se producen en una pared. Para esto se colocó una pared perpendicular a la dirección formada por el micrófono y el centro de giro de la fuente, con este último ubicado entre el micrófono y la pared. Se dirá *directa* a la señal proveniente directamente de la fuente e *imagen* a la que llega como reflejo desde la pared. La distancia mínima entre fuente y micrófono fue, para la señal directa de 3 cm, y debido a que la distancia mínima entre fuente y pared fue de 5 cm, la distancia mínima entre señal imagen y micrófono resultó ser de 1513 cm. El radio de giro fue de 75 cm (esto vale también para la señal imagen), y para ajustar con las curvas teóricas se tomó como frecuencia angular de giro a la obtenida en la sección anterior, que fue de 13,465 Hz. La bondad del ajuste del modelo de las imágenes se cuantificó usando la función χ^2 .

A continuación se mostrará el sonograma en esta situación, y superpuesto a él se mostrarán las curvas teóricas que se obtienen del método de imágenes, en negro la que corresponde a la señal directa y en rojo la que corresponde a la señal imagen.

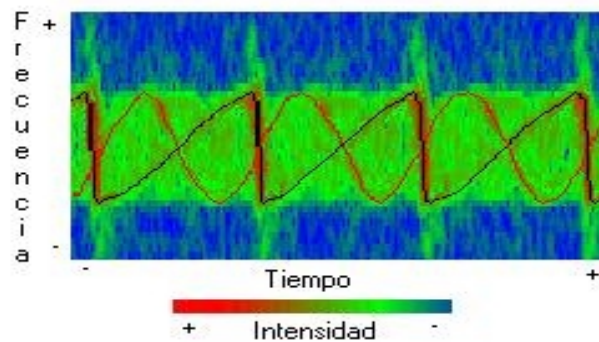


Figura 4.10. Sonograma en el estudio del método de imágenes. Superpuesto en línea negra y en línea roja se muestran las curvas teóricas de las señales directa e imagen respectivamente.

A continuación se muestra el gráfico de frecuencia en función del tiempo, tanto para la señal directa como para la señal imagen, con los puntos obtenidos del sonograma anterior empleando el programa *xyExtract*, superpuestos a las correspondientes curvas teóricas (2.6) y (2.11)

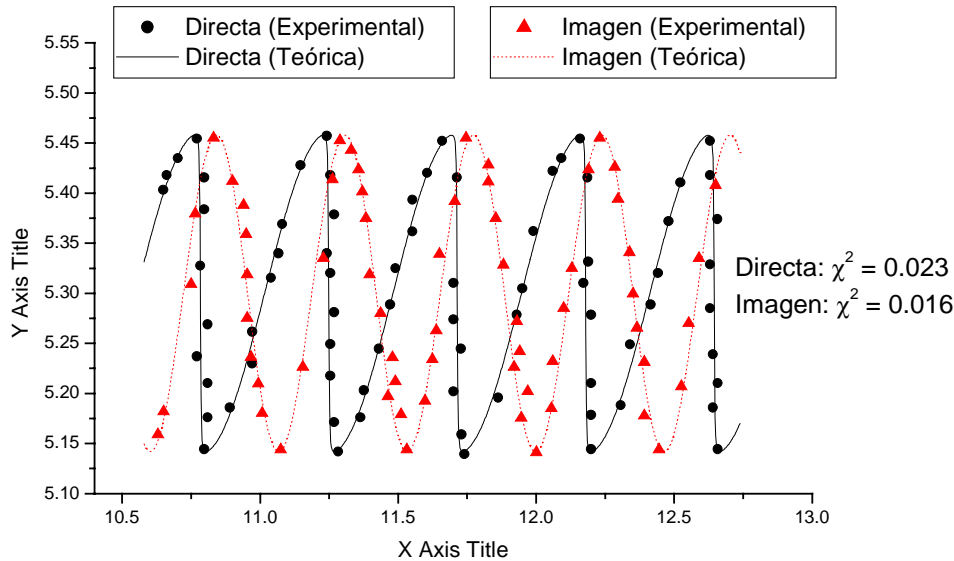


Figura 4.11. Frecuencia en función del tiempo para la señal directa y la señal imagen. Comparación entre resultados experimentales y predicción teórica.

Se aprecia una muy buena concordancia entre los valores experimentales y las curvas teóricas en ambos casos, validando la hipótesis en cuanto al método de imágenes para tratar las reflexiones en una pared. También se aprecia aquí muy claramente como varía el intervalo de tiempo entre frecuencia máxima – mínima al aumentar la distancia mínima entre fuente y micrófono, siendo este muy pequeño en el caso directo y prácticamente igual al de intervalo de tiempo entre frecuencia mínima –máxima en el caso imagen.

IV. Conclusiones

En este trabajo estudiamos el efecto Doppler de una fuente de sonido en un movimiento circular, para el caso libre de reflexiones y para el caso de reflexiones producidas en una pared cercana. Para saber cómo varía la frecuencia en función del tiempo se emplearon mapas de frecuencia – tiempo llamados sonogramas y se hicieron mediciones sobre estos diagramas.

Para el caso del movimiento libre, se estudió como varían distintos parámetros de la curva de frecuencia en función del tiempo variando por un lado la distancia mínima d entre fuente y micrófono y por otro lado la frecuencia angular de giro ω de la fuente.

Las mediciones del intervalo de tiempo δ en función de la distancia D se ajustaron con la ecuación (2.9) y se obtuvo para la función χ^2 un valor de $\chi^2 = 4,5\%$. Las mediciones de δ y de Δf en función de la frecuencia ω se ajustaron utilizando las ecuaciones (2.9) y (2.7) obteniéndose para la función χ^2 los valores $\chi^2 = 12\%$ y $\chi^2 = 3\%$ respectivamente.

Para las distancias $d = 6\text{ cm}$, 31 cm , 51 cm y 81 cm se hicieron mediciones de la frecuencia en función del tiempo. La frecuencia de giro se encontró minimizando la función χ^2 para uno de los casos y utilizando este resultado en el resto de las mediciones. Se ajustaron los resultados usando la ecuación (2.6) obteniendo valores de χ^2 del orden del 1% en todos los casos.

Para el caso del experimento en las cercanías de una pared, se trataron las reflexiones con el método de las imágenes. Las mediciones realizadas sobre el sonograma se ajustaron con la ecuación (2.11) y se obtuvo una buena correspondencia entre las predicciones de este modelo y los resultados ($\chi^2 = 1,6 \%$).

Los buenos valores obtenidos para la función Chi-cuadrado, del orden del 1% utilizando la frecuencia corregida y de 1,6% para el caso de las reflexiones, reflejan el buen acuerdo entre la teoría y el experimento y podemos decir que el método de las imágenes es adecuado para tratar las reflexiones de una onda sonora en una pared.

Apéndice A: La componente paralela de la velocidad de rotación $v_{//}$

Podemos escribir la ecuación (2.1) como

$$v_{//} = -v_f (\text{sen}(\omega t) \cos(\beta) + \text{sen}\beta \cos(\omega t)) \quad (\text{A.1})$$

De la figura 2.1 se ve que $l \text{sen}(\beta) = r \text{sen}(\omega t)$, de manera que (A.1) se escribe como

$$v_{//} = -v_f \text{sen}(\omega t) \left(\cos(\beta) + \cos(\omega t) \frac{r}{l} \right)$$

$$v_{//} = -v_f \text{sen}(\omega t) \left(\frac{\cos(\beta)l + \cos(\omega t)r}{l} \right) \quad (\text{A.2})$$

Como se ve en la figura 2.1, $\cos(\beta)l + \cos(\omega t)r = D$, así que (A.2) queda

$$v_{//} = -v_f \text{sen}(\omega t) \left(\frac{D}{l} \right) \quad (\text{A.3})$$

Como $l^2 = r^2 + D^2 - 2rD \cos(\omega t)$ y $\alpha = r/D$ tenemos $l^2 = D^2 (\alpha^2 + 1^2 - 2\alpha \cos(\omega t))$, con lo que podemos escribir finalmente

$$v_{//} = -v \text{sen}(\omega t) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha - 2\alpha \cos(\omega t)}} \quad (\text{A.4})$$

Apéndice B: La función Chi-cuadrado

Supongamos que tomamos una serie de N mediciones de dos magnitudes cuya relación deseamos determinar. Como resultado de nuestras mediciones obtenemos una serie de N ternas de la forma (x_i, y_i, σ_i) donde σ_i es la incertidumbre asociada a la medición de y_i y suponemos que la incertidumbre de x_i es despreciable. Supongamos también que el modelo teórico que ajusta los datos viene dado por la función $y(x_i) = f(x_i; a, b, c, \dots)$ donde a, b, c etc. son los n_{par} parámetros del modelo [5].

En el caso mas general definimos la función Chi-cuadrado como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N w_i (y_i - y(x_i))^2 \quad (\text{B.1})$$

La cantidad $(y_i - y(x_i))^2$ representa las desviaciones entre el valor medido y_i y el predicho por el modelo $y(x_i)$ y w_i es un factor de peso de cada triada de datos (x_i, y_i, σ_i) . De esta manera χ^2 es una medida de la desviación total de los valores medidos respecto de los predichos teóricamente, ponderados por un factor w_i .

Suele usarse para w_i el valor $w_i = 1/\sigma_i^2$, aunque a veces es útil emplear otros factores de peso como $w_i = 1/y_i^2$ o $w_i = 1/y_i$. Si los datos no tienen asignado un error de medición σ_i , puede elegirse también $w_i = 1$

La función Chi-cuadrado se puede utilizar para encontrar el mejor valor de un parámetro y para cuantificar la bondad de un ajuste teórico de resultados experimentales.

a) Encontrar el mejor valor de un parámetro

Podemos usar la función Chi- cuadrado para encontrar el mejor valor de un parámetro de nuestro modelo. Supongamos que nuestro modelo depende de un solo parámetro $y(x_i) = f(x_i, a)$ y deseamos obtener el valor de a que mejor ajuste los resultados experimentales. El mejor valor de a es aquel que minimiza la función χ^2 [5]. Usando una planilla de cálculo puede calcularse la función χ^2 y modificar el valor de a hasta encontrar el valor a_0 que minimice la función χ^2 . Para ese valor a_0

$$\chi_{\min}^2 = \chi^2(a_0) \quad (\text{B.2})$$

Un método aproximado para calcular la incertidumbre del parámetro a es considerar cuál es el incremento que debe sufrir a para que la función χ^2 crezca en una unidad [5]. Tal incremento se toma como el error del parámetro a . Es decir

$$\chi_{\min}^2 + 1 = \chi^2(a_0 + \Delta a) \quad (\text{B.3})$$

b) Bondad del ajuste

También podemos usar la función Chi-cuadrado para tener una medida de la bondad o calidad del ajuste de los resultados dado por el modelo. Una medida de la bondad del ajuste esta dada por el valor de χ_v^2 [6]

$$\chi_v^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^N w_i (y_i - y(x_i))^2 \quad (\text{B.4})$$

donde $\nu = N - n_{par}$ es el número de grados de libertad.

Si tomamos $w_i = 1 / \sigma_i$ podemos decir que si todos los datos experimentales y_i tienen desviaciones respecto del modelo $y(x_i)$ que no superen el error σ_i , nuestro modelo es el adecuado para describir nuestras observaciones. En ese caso cada término de la sumatoria será del orden de la unidad y podemos decir que si χ_v^2 es del orden de la unidad o menor el modelo propuesto para explicar los datos experimentales es el adecuado.

Si los datos experimentales no tienen asignado un error, podemos elegir $w_i = 1/y_i^2$ y entonces

$$\chi_v^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - y(x_i))^2}{y_i^2} \quad (\text{B.5})$$

En este caso cada término de la sumatoria es el cuadrado de las desviaciones *relativas* y χ_v^2 representa un promedio de esas desviaciones. Multiplicando por 100, tenemos una cantidad χ_v^2 que mide el porcentaje promedio de las desviaciones relativas entre el modelo y los datos experimentales.

REFERENCIAS

[1] Sears, Zemansky; *Física Universitaria, Vol 1*, Addison Wesley Longman (1998)[2] S. Spicklemire, M. Coffaro, *The treatment of reflections in a Doppler measurement using the method of images*; Am. J. Phys, 74 (2006)

[3] M. Saba, R. Rosa; *The Doppler effect of a sound source moving in a circle*; The Physics Teacher; 41, 2003

[4] A. Romero, M. E. Capoulat; *Análisis del efecto Doppler para una fuente en movimiento circular*; Laboratorio 5, Dpto Física, FCEyN, UBA

[5] S. Gil, E. Rodríguez; *Métodos cuantitativos de análisis gráficos*; Física re-creativa

[6] S. Gil, E. Rodríguez; *Análisis avanzado, Bondad de ajuste*; Física re-creativa

[7] xyExtract Graph Digitizer, <http://www.gold-software.com/download5149.html>

[8] Existen muchos programas que generan un sonograma a partir de un archivo .wav. Por ejemplo Audacity (disponible en www.superarchivos.com) o programa SpectroGram versión 11.2 (by Richard Horne <http://www.visualizationsoftware.com/gram.html>). Ver también: What are spectrograms? <http://cslu.cse.ogi.edu/tutordemos/SpectrogramReading/spectrogram.html>