

Ondas acústicas en una caja rectangular

Diego Tanoni y Alejandro Krieger

e-mail: diegotanoni@yahoo.com.ar y alejandro_krieger@yahoo.com

Laboratorio 5, Dpto. Física, FCEyN; UBA - 2006

En este trabajo se estudian las frecuencias de resonancia de una caja rectangular de madera. Se encontraron varias frecuencias de resonancia que coinciden con los valores esperados teóricamente. Para tres frecuencias de resonancia en particular se estudió la relación entre el ancho de la curva de resonancia y el tiempo de decaimiento de cada modo y se encontró una relación inversa entre ambos parámetros, en concordancia con la teoría.

I. Introducción

El comportamiento del sonido en la materia está descrito por la ecuación ^(1,2)

$$\nabla^2 p - \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{d^2 p}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

donde p es la presión y c es la velocidad del sonido en el medio. Para un sistema de tres dimensiones una solución para (1) es

$$P = Ae^{i\omega t} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \quad (2)$$

donde k_1, k_2 y k_3 son las componentes del vector de onda k ($k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$) y $\omega = ck$.

En una caja rectangular de lados a, b, c y teniendo en cuenta las condiciones de borde del problema, que en este caso requieren que la presión sea máxima en cada una de las paredes de la caja, la ecuación (2) se convierte en ^(1,3)

$$P = Ae^{i\omega t} \cos\left(n_1 \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n_2 \frac{\pi}{b} y\right) \cos\left(n_3 \frac{\pi}{c} z\right) \quad (3)$$

donde n_1, n_2 y $n_3 = 1, 2, 3, \dots$. Reemplazando esta ecuación en (2) obtenemos

$$\omega^2 = \pi^2 c^2 \left[\left(\frac{n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{c}\right)^2 \right] = c^2 k^2 \quad (4)$$

o bien, en términos de frecuencia

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left[\left(\frac{n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{c}\right)^2\right]} \quad (5)$$

Esta ecuación muestra que la frecuencia de oscilación natural de un gas en una caja está cuantizada. Solo son posibles algunas frecuencias de oscilación, dadas por la ecuación (5) y caracterizadas por los la triada de números (n_1, n_2, n_3) . También vemos que las frecuencias no son múltiplos unas de las otras. La idea de que las frecuencias naturales están relacionadas armónicamente no es cierta para sistemas de más de una dimensión ⁽¹⁾.

Una de las características a estudiar en este informe consiste en analizar como influye un termino de rozamiento en la ecuación de onda (1), ecuación que se transforma en

$$c^2 \nabla^2 p = \frac{d^2 p}{dt^2} + \Gamma \frac{dp}{dt} \quad (6)$$

Efectuando la separación de variables, la ecuación que contiene coordenadas espaciales no se ve modificada, dando los mismos valores de ω , (los cuales desde ahora, por razones que se verán más adelante, llamaremos ω_b). Sin embargo, la componente temporal si sufre una modificación, de donde resulta la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \Gamma \frac{dp}{dt} + \omega_0^2 T = 0 \quad (7)$$

La forma de esta ecuación diferencial depende de la siguiente relación

$$D = \omega_0^2 - (\Gamma/2)^2 \quad (8)$$

Si $D > 0$, se dice que el sistema es subamortiguado, si $D = 0$, que el sistema es críticamente amortiguado, mientras que si $D < 0$, que el sistema es sobreamortiguado. En nuestro caso sólo ocurrirá el caso subamortiguado ($D > 0$), en el cual la solución es de la forma:

$$T = A \exp\left(-\frac{\Gamma}{2}t\right) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}t + \phi\right) \quad (9)$$

donde A y ϕ dependen de las condiciones iniciales.

Una magnitud interesante es el tiempo (t_0) que transcurre para que el factor exponencial de la solución anterior decaiga en e^{-1} de su valor inicial. Se observa fácilmente de la ecuación (9) que $t_0 = 2/\Gamma$. El valor de t_0 es una de las magnitudes que se determinó experimentalmente. Se define tiempo de decaimiento (τ) como la mitad de t_0 , o sea:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (10)$$

Otra característica a estudiar de estos sistemas es su respuesta al forzarlo con una señal externa de frecuencia definida. Debido a que la solución transitoria decae exponencialmente, al forzar con una frecuencia definida, el sistema oscilará sólo con esa frecuencia una vez que el transitorio se hace despreciable. La amplitud de la solución correspondiente al término forzado, alcanza los valores más altos en las frecuencias de oscilación propias del sistema, o sea en aquellas que se obtienen de resolver la parte espacial luego de la separación de

variables. Un objetivo es determinar como es el comportamiento de la amplitud para frecuencias cercanas a las de resonancia. Para comprender este fenómeno, añadimos a la parte temporal de la ecuación diferencial un término “forzado” usando como analogía un sistema mecánico. La ecuación queda, para cada ω_0 de la siguiente forma:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \Gamma \frac{dp}{dt} + \omega_0^2 T = F \cos(\omega t) \quad (11)$$

siendo F , en un sistema mecánico la amplitud de la fuerza por unidad de masa. La solución de esta ecuación tiene una parte que es idéntica a (9), que recordamos que decae en el tiempo, más un término estacionario (Te) de la forma

$$Te = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t) \quad (12)$$

donde K_1 y K_2 se obtienen reemplazando (12) en (11) y pidiendo que la igualdad se cumpla para todo tiempo. Una forma alternativa de (12) es la siguiente:

$$Te = K \cos(\omega t + \alpha) \quad (13)$$

donde K y α se relacionan con K_1 y K_2 mediante relaciones trigonométricas. Puede demostrarse fácilmente que:

$$K^2 = \frac{F^2}{\omega^2 \Gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (14)$$

El módulo de K , que de ahora en adelante lo llamaremos simplemente K , es otra de las magnitudes que se determinó experimentalmente.

Una magnitud de interés es la potencia por unidad de masa consumida en el estado estacionario promediada en un ciclo $T = \omega 2\pi$ ⁽⁴⁾. Esta está definida por:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T F \cos(\omega t) \left(\frac{dTe}{dt} \right) dt \quad (15)$$

Calculándose la expresión anterior ⁽⁴⁾, se llega a

$$P = \frac{F^2 \Gamma \omega^2}{2(\omega^2 \Gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} \quad (16)$$

o

$$P = \frac{\Gamma \omega^2}{2} K^2 \quad (17)$$

El valor de ω para el cual P se hace máxima es ω_0 . Valores importantes son aquellos valores de ω para los cuales P alcanza la mitad de su valor máximo. Se llega a que estos valores son ⁽⁴⁾:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \pm \frac{\Gamma}{2} \quad (18)$$

El intervalo de frecuencias entre estos dos puntos se define como ancho de semipotencia ($\Delta\omega$), deduciéndose de (15) que:

$$\Delta\omega = \Gamma \quad (19)$$

De las ecuaciones (10) y (19) se observa una importante relación entre las magnitudes $\Delta\omega$ y τ :

$$\tau \Delta\omega = 1 \quad (20)$$

El objetivo de este trabajo consistió en encontrar las frecuencias de resonancia de una caja rectangular de madera, medir el ancho de la curva de resonancia y compararla con el tiempo de decaimiento de cada modo.

II . El Experimento

1. Frecuencias de resonancia

El dispositivo experimental utilizado para buscar las frecuencias de resonancia (figura 2.1) consistió en un parlante conectado a un generador de funciones ubicado en el vértice de una caja rectangular de madera de dimensiones 68,5cm x 53,8cm x 28,2cm. En

el vértice diagonalmente opuesto de la caja se colocó un micrófono con su correspondiente amplificador, cuya ganancia era de 3,13. Tanto la salida del generador como la señal del micrófono se observaron simultáneamente en un osciloscopio.

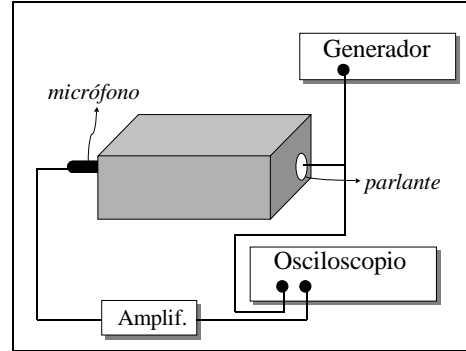


Figura 2.1: diagrama del dispositivo experimental utilizado para encontrar las frecuencias de resonancia de una caja rectangular.

Para encontrar las frecuencias de resonancia se seleccionó en un generador de ondas Tektronix CFG 253 una señal sinusoidal de amplitud 240mV pp. y se realizó un barrido en frecuencia desde los 200 Hz hasta los 2,5 KHz. Se registraron aquellas frecuencias en las que se observaba un aumento de la amplitud de la señal del micrófono. Esta operación se realizó dos veces y las frecuencias que se repitieron fueron estudiadas mas detalladamente con un generador de funciones más sensible - Keithler 3910 -

Para ello se seleccionó en este generador una frecuencia algo menor que la encontrada previamente y se aumentó la frecuencia en incrementos de 1 Hz. Una vez encontrada la frecuencia f_{med} que generaba el máximo de amplitud A_{max} , se continuó aumentando la frecuencia hasta encontrar el valor para el cual la amplitud hubiera decaído a la mitad.

La diferencia entre estas dos frecuencias, correspondiente al ancho de la curva de resonancia, se tomó como el error de la medición Δf . Los resultados encontrados se muestran en la tabla 2.2

f_{res} (Hz)	Δf (Hz)	A_{max} (V) ($\pm 0,05V$)
653	10	2,52
748	7	3,70
780	8	7,04
944	12	5,04
1030	15	4,24
1121	27	3,06
1418	4	3,00
1915	13	1,80
1989	9	1,90
2205	6	1,40

Tabla 2.1 : Frecuencias de resonancia medidas; amplitud máxima de cada modo y ancho de la curva de resonancia.

Observamos que la amplitud máxima de los modos primero crece y luego cae con la frecuencia y que el ancho Δf de cada resonancia es variable. Esto sugiere que la disipación de energía en cada modo se comporta diferente.

Una vez medidas las frecuencias de resonancia f_{med} , se utilizó la ecuación (5) para buscar los valores teóricos f_{teo} de las frecuencias de resonancia. Para ello asignamos distintos valores enteros a n_1 , n_2 y n_3 y comparamos las frecuencias obtenidas con los resultados experimentales, buscando aquellas que más se acercaran a la medida.

f_{med} (hz)	Δf	f_{teo} (hz)	n_1	n_2	n_3
653	10	647,39	1	0	1
748	7	739,34	3	0	0
780	8	775,45	2	0	1
944	12	941,36	0	3	0
1030	15	1034,53	4	1	0
1121	27	1115,58	0	3	1
1418	4	1412,27	1	4	1
1915	13	1918,32	1	2	3
1989	9	1990,91	1	6	1
2205	6	2210,29	1	7	0

Tabla 2.2: Resultados experimentales comparados que los valores calculados teóricamente luego de ajustar por cuadrados mínimos la velocidad c_s de manera de minimizar las diferencias.

Modificando la velocidad del sonido c_s , se buscó un valor para c_s que minimizara la suma de los cuadrados de la diferencia entre cada f_{res} y su correspondiente f_{teo} . El valor obtenido fue de $c_s = 337,6$ m/s para una temperatura ambiente de 25 °C. Los resultados se muestran en la tabla 2.2 y en la figura 2.2

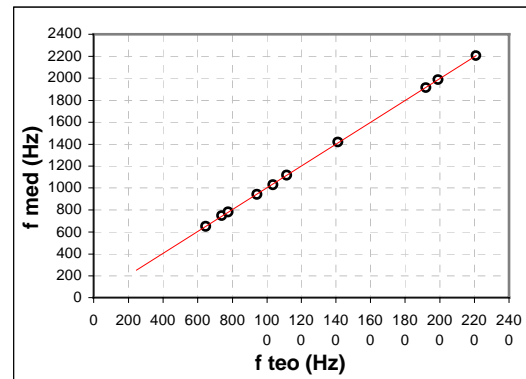


Figura 2.2: Correspondencia entre las frecuencias de resonancia medidas y las frecuencias teóricas encontradas a partir de la ecuación (5)

Vemos que las frecuencias de resonancia encontradas son sólo algunas de las frecuencias propias de la caja.

Para las frecuencias 780Hz, 1121Hz y 1418Hz se midieron detalladamente los valores de amplitud de la señal del micrófono con el fin de construir la curva de resonancia para esas frecuencias. Los valores obtenidos se muestran a continuación.

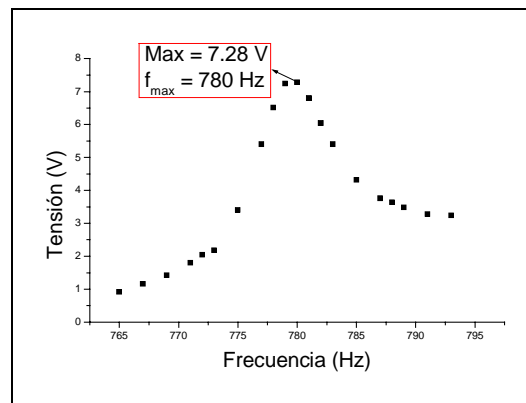


Figura 2.3 (a)

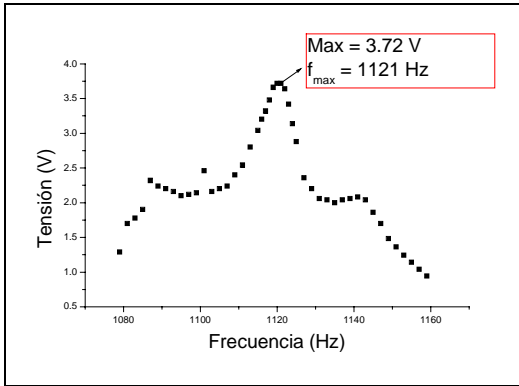


Figura 2.3 (b)

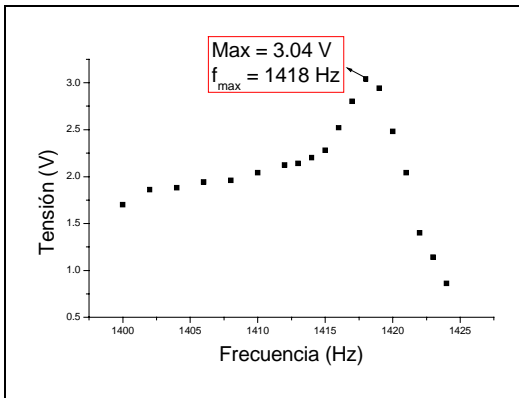


Figura 2.3 (c)

Figuras 2.3 (a), 2.3 (b) y 2.3 (c): Curvas de amplitud (K) en función de la frecuencia en los entornos de las frecuencias de resonancia de 780 Hz, 1121 Hz y 1418 Hz respectivamente.

2. Tiempo de decaimiento

Con el objetivo de medir el tiempo de decaimiento de los modos de oscilación se utilizó el mismo dispositivo de la figura 2.1, pero en esta oportunidad el parlante era controlado por un circuito como el mostrado en la figura 2.2.

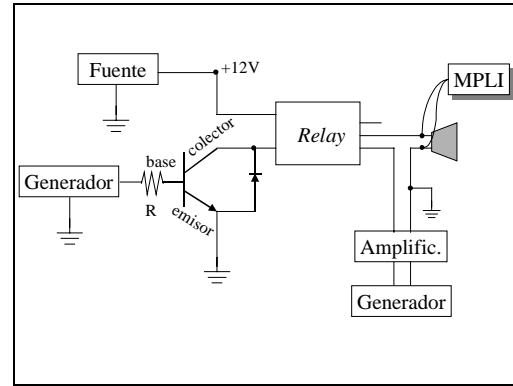


Figura 2.4: Circuito utilizado para controlar el encendido y apagado del parlante. No se muestra la salida del micrófono, que también se adquirió digitalmente (MPLI)

Este circuito fue diseñado de manera de poder alimentar el parlante con una onda senoidal y luego poder cortar la señal y permitir que el sistema se relaje. Consiste en un transistor en la base del cual se conectó un generador que emitía una onda cuadrada. El colector se conectó a una de las salidas de relé. La otra salida del relé se conectó a una fuente que proporcionaba una tensión constante de 12V. Las otras dos salidas del relé se conectaron al parlante y un generador que enviaba una onda sinusoidal. De esta manera cuando el generador de la base del transistor envía un voltaje distinto de cero, el transistor permite el paso de corriente desde la fuente a través del relé hacia el emisor del transistor. Esta corriente atraviesa una bobina dentro del relé, cuyo campo magnético atrae una llave que cierra el circuito de la derecha. Este circuito consiste en un parlante y un generador conectado a un amplificador de audio, usado para adaptar las impedancias del generador y el parlante. Entre el colector y el emisor se conectó un diodo con el fin de proteger al transistor de las posibles corrientes producidas por la fem inducida en la bobina del relé cuando se corta la corriente. Tanto la salida del parlante como la del micrófono fueron capturados con un sistema de adquisición digital (MPLI)

La figura 2.4 muestra los resultados obtenidos para una frecuencia de arbitraria 648 Hz. La señal en rojo corresponde al

parlante y la señal en azul es la señal del micrófono.

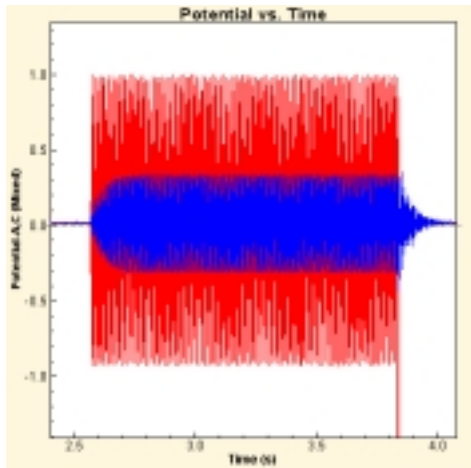


Figura 2.5: Señal del parlante (rojo) y el micrófono (azul) para una señal de 648Hz. Se observa el régimen transitorio y el decaimiento de las oscilaciones.

Puede verse que el parlante comienza a oscilar en determinado momento y durante cierto tiempo y luego se detiene. La señal del micrófono muestra el régimen transitorio cuando se inicia el movimiento del parlante, el régimen estacionario y finalmente, una vez apagado el parlante, el decaimiento de las oscilaciones.

Se adquirieron mediciones como esta para las tres frecuencias 780Hz, 1121Hz y 1418Hz estudiadas en detalle en II.1. Se adquirió durante 0.3s a una frecuencia de adquisición de 15KHz.

Los siguientes gráficos muestran el comportamiento simultaneo de las señales de entrada y salida para las tres frecuencias de resonancia. Se aprecia como la señal de salida no se interrumpe instantáneamente cuando lo hace la señal

de entrada, pero comienza a descender en amplitud según lo esperado para una oscilación libre a través de la expresión (9). También se aprecia como la señal de salida no adquiere instantáneamente su amplitud máxima, sino que necesita un periodo de tiempo para entrar en régimen.

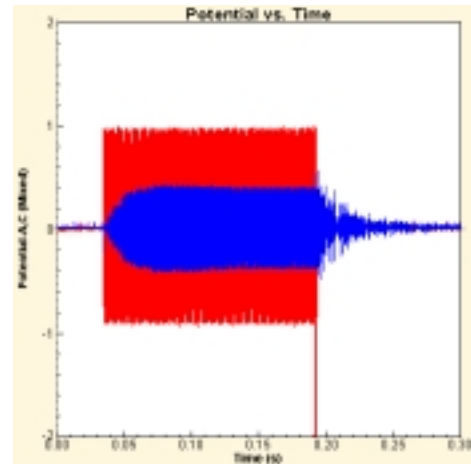


Figura 2.6 (a): Frecuencia de resonancia = 780 Hz

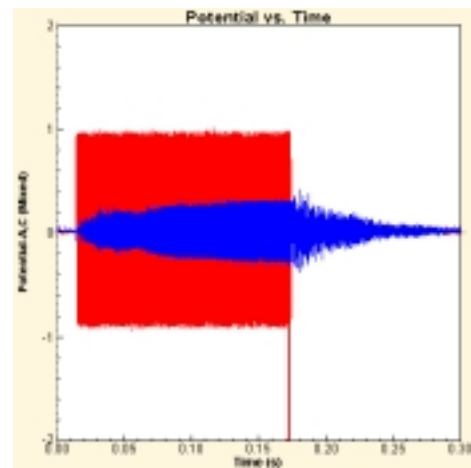


Figura 2.6 (b): Frecuencia de resonancia = 1121 Hz

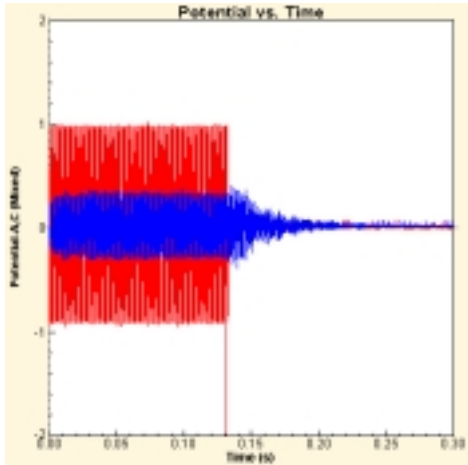


Figura 2.6 (c): Frecuencia de resonancia = 1418 Hz

Figuras 2.6 (a), 2.6 (b) y 2.6 (c): Curvas de tensión en función del tiempo. La señal de entrada (parlante) corresponde al color rojo mientras que la de salida (micrófono) corresponde al color azul.

III-Discusion

Los siguientes gráficos se realizaron con el objetivo de encontrar el ancho de semipotencia en las tres frecuencias estudiadas con anterioridad, para ello se gráfico $\omega^2 K^2$ vs. ω (ω es igual a la frecuencia multiplicada por 2π). Observar que P y $\omega^2 K^2$ difieren en un factor $\Gamma/2$ (ecuación 17), pero como este factor es constante (o sea, no depende de ω) el ancho de semipotencia es el mismo. Así, de la relación anterior se puede obtener $\Delta\omega$.

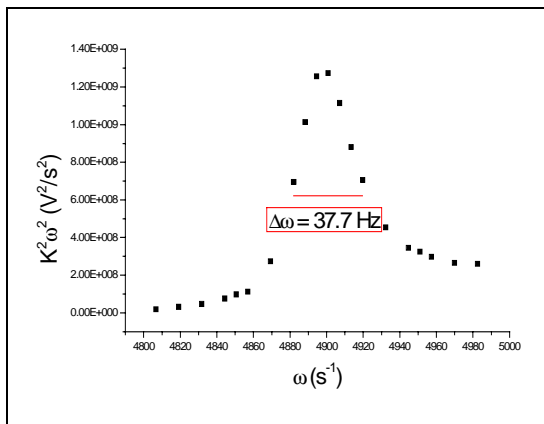


Figura 3.1 (a): Frecuencia de resonancia = 780 Hz

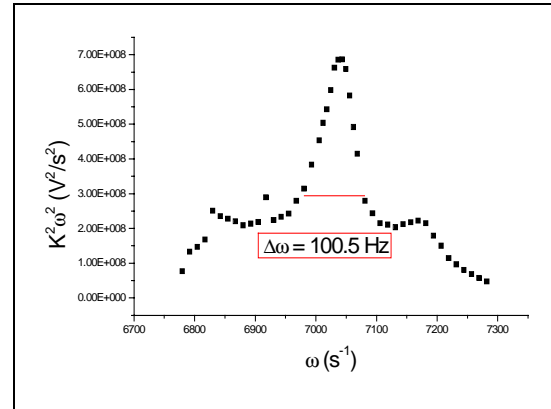


Figura 3.1 (b): Frecuencia de resonancia = 1121 Hz

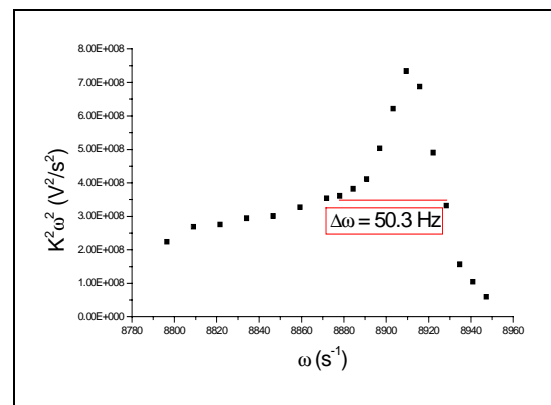


Figura 3.1 (c): Frecuencia de resonancia = 1418 Hz

Figuras 3.1 (a), 3.2 (b) y 3.3 (c): Curvas de $K^2 \omega^2$ en función en función de w para determinar $\Delta\omega$.

Los gráficos que se muestran a continuación permiten observar como decae la señal de salida cuando se retira la señal de entrada. Observando el intervalo de tiempo que transcurre hasta que la amplitud de la exponencial moduladora decae en e^{-1} del valor que tenía justo en el momento que se retiro la señal de entrada puede determinarse t_0 , y de ahí el valor de τ . Las frecuencias a las que se realizaron estas mediciones son las de resonancia de los gráficos anteriores.

El método empleado para encontrar t_0 fue el siguiente: se buscaron los puntos que correspondían a máximos locales, o sea aquellos puntos que eran mayores a sus vecinos inmediatos tanto por izquierda como por derecha. Luego, de estos puntos, se determinó el que correspondía al valor

máximo entre ellos (es la amplitud una vez que se retira la señal de entrada), y finalmente se buscó el punto que mejor aproximaba a e^{-t} de ese valor máximo. El intervalo de tiempo transcurrido entre estos dos puntos es justamente t_0 .

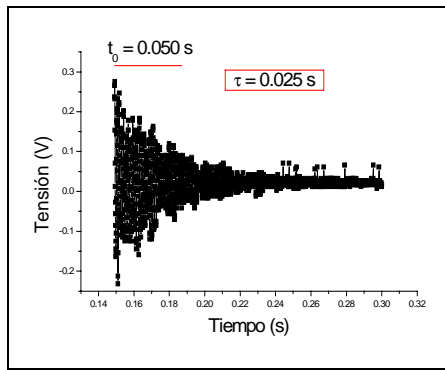


Figura 3.2 (a): Frecuencia de resonancia = 780 Hz

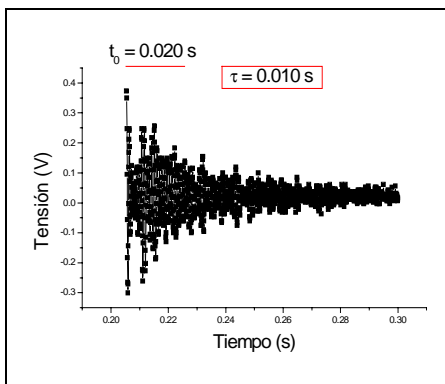


Figura 3.2 (b): Frecuencia de resonancia = 1121 Hz

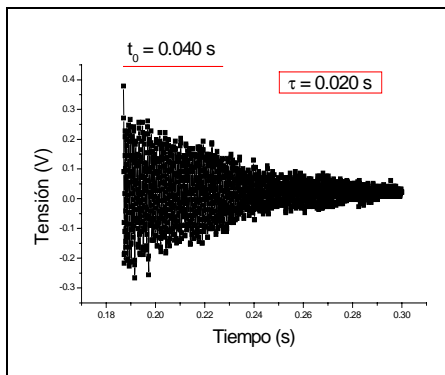


Figura 3.2 (c): Frecuencia de resonancia = 1418 Hz

Figuras 3.2 (a), 3.2 (b) y 3.3 (c): Curvas tensión en función del tiempo luego de retirarse la señal de entrada para determinar τ .

La siguiente tabla resume los valores de $\Delta\omega$ y τ , así como el resultado de $(\tau\Delta\omega)$ con objetivo de verificar la ecuación (20) en cada una de las tres frecuencias de resonancia mostradas en los gráficos anteriores.

Frecuencia de resonancia (Hz)	$\Delta\omega$ (Hz)	τ (s)	$\tau\Delta\omega$
780	37.7	0.025	0.9425
1121	100.5	0.010	1.0050
1418	50.3	0.020	1.0060

Tabla 3.1: Valores de $\Delta\omega$, τ y $\tau\Delta\omega$ para las tres frecuencias de resonancia estudiadas en detalle. Pueden compararse los resultados de la última columna con la predicción teórica dada por la ecuación (20).

IV-Conclusion

En este trabajo se estudiaron las frecuencias de resonancia de una caja de madera rectangular.

Se encontraron varias de las frecuencias de resonancia predichas por la ecuación (5). Los resultados experimentales y teóricos fueron ajustados por cuadrados mínimos variando la velocidad del sonido c . El valor que mejor ajustaba los datos fue de $c = 337,6$ m/s.

Para las frecuencias 780Hz, 1121Hz y 1418 Hz se midieron detalladamente los valores de amplitud de la señal del micrófono y se construyó la curva de resonancia para esas frecuencias, de la cual se extrajo el valor para el ancho de semipotencia $\Delta\omega$.

Con el fin de medir el tiempo de decaimiento de los modos de oscilación se construyó un circuito para alimentar el parlante con una onda senoidal y luego poder cortar la señal y permitir que el sistema se relaje. Se midieron las mismas tres frecuencias estudiadas anteriormente y se encontró un tiempo de decaimiento τ para cada una de ellas.

El producto $\tau\Delta\omega$ resultó prácticamente igual a 1 para las tres frecuencias estudiadas, en concordancia con lo esperado según la ecuación (20).

REFERENCIAS

- (1) Feynman, Leighton y Sands; *Física, Vol 1*, Cap. 47 y 48, Addison Wesley Longman de México S.A., 1998
- (2) M. Alonso y E. Finn; *Física Vol. 2, Cap 18*; Addison Wesley Iberoamericana S.A., 1987
- (3) S.Gil y E. Rodríguez; *Ondas acústicas en una caja cuadrada*; Física re-Creativa, Prentice Hall- Buenos Aires 2001
- (4) Frank S Crawford, Jr; *Ondas; Cap 3*, Editorial Reverté 1968.