

ESTUDIO DE LA DIFUSIÓN DEL CALOR

Victor Mincez – victormincez@hotmail.com Nicolás Busca – ngbusca@hotmail.com
Departamento de Física - FCEyN - Universidad de Buenos Aires- Agosto 2000

Se estudia en este trabajo la difusión del calor. Se comparan dos diferentes modelos, uno correspondiente a la ausencia de flujo de calor con el medio circundante y otro que toma en cuenta este intercambio. Se muestra que este último modelo explica mejor el comportamiento del sistema en el caso estacionario y que ninguno de los modelos explica correctamente la evolución temporal.

1.INTRODUCCIÓN. En este trabajo se estudia la manera en que se difunde el calor a lo largo de una barra metálica cuando se aplica potencia a uno de sus extremos. En el primero de los casos estudiados esto se hace de manera constante mientras se coloca el otro extremo en un baño térmico. A su vez, este caso se divide en dos. Uno con la barra cubierta por un material aislante (barra aislada), y otro con la barra sin él (barra no aislada). Se analizan las condiciones inicial y final así como el transitorio para diferentes magnitudes de la potencia aplicada. En el segundo, la potencia aplicada es periódica y se analizan la dependencia de la temperatura media, la amplitud de la oscilación, y la fase en función a la posición.

Al comparar los datos obtenidos para la aplicación de potencia constante se observa que la barra aislada se comporta igual que la barra no aislada. Estos datos se comparan a su vez con dos modelos: en uno de ellos se supone a la barra aislada térmicamente del medio y el otro considera la disipación hacia el medio externo. Se hace patente en la experiencia que el primero no explica las temperaturas obtenidas para la situación estacionaria. Sí lo hace el que supone intercambio térmico con el medio. Ninguno de los dos, sin embargo, ajusta la evolución temporal.

En lo que sigue de esta sección, discutiremos los modelos teóricos ya mencionados.

El flujo de calor dentro de un material se relaciona con la temperatura según la ecuación de Fourier :

$$\vec{q} = -\eta \nabla T \quad [1]$$

Donde T es la temperatura, \vec{q} es el flujo de calor y η es la constante de conducción térmica del material.

Se debe destacar que el valor del flujo de calor en el extremo de la barra es igual a la potencia entregada, lo que hace a esta última proporcional a la derivada espacial de la temperatura en él. Si esta corriente es la única fuente de energía se tiene además que, por conservación :

$$\nabla \cdot \vec{q} = -C_v \dot{T} \quad [2]$$

De 1 y 2 y teniendo en cuenta que el problema estudiado es unidimensional esto se reduce a :

$$\dot{T} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad [3]$$

donde α es η/C_v . Se deduce de esta ecuación que la situación estacionaria ($\dot{T}=0$) predicha por este modelo es una función lineal de la posición sobre la barra cuyos parámetros se obtienen de las condiciones de contorno.

Para hallar el transitorio, resolvemos la ecuación 3 se resuelve desarrollando la posición en serie de Fourier. La solución es de la forma :

$$T(x,t) = T(x,t \rightarrow \infty) + \sum \{a_n(t) \cos(k_n \cdot x) + b_n(t) \operatorname{sen}(k_n \cdot x)\}$$

La dependencia temporal de los coeficientes se obtiene reemplazando esta expresión en la ecuación [3]. Se obtiene entonces

$$a_n = a_n^{(0)} e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Los coeficientes $a_n^{(0)}$ se obtienen desarrollando Fourier la condición inicial menos el estacionario. Este modelo no da cuenta de la disipación al medio externo. Entonces, proponemos el siguiente modelo que da cuenta de ello.

Consideremos un objeto cuya temperatura es constante, colocado en un medio a temperatura T_0 . Entonces, la ecuación que rige la evolución de su temperatura en el tiempo es:

$$\dot{T} = -\beta(T - T_0) \quad [4]$$

β es el llamado coeficiente de Newton.

Si tenemos en cuenta esta disipación, la fórmula de conservación (3) se modifica de la siguiente manera :

$$\dot{T} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta(T - T_0) \quad [5]$$

Su solución en el caso en que la variación de la temperatura es nula, (estacionario con potencia constante) es :

$$T(x,t \rightarrow \infty) = T_0 + A \cdot e^{-b \cdot x} + B \cdot e^{b \cdot x} \quad [6]$$

Donde A y B dependen de las condiciones de contorno y b está dado por :

$$b = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

La solución general de 5, considerando una aplicación de potencia constante en un extremo y una temperatura constante en el otro es de análoga a la del caso aislado.

Las frecuencias espaciales más altas tienden a decaer más rápidamente, esto se explica porque la temperatura tiende a homogeneizarse, y se ve en la ecuación porque los modos de frecuencia espacial mayor tiene derivada mayor.

Hay que recalcar, pues servirá para comparar el modelo de la barra aislada con el de la que no lo está, que ya que la relación 1 sigue valiendo, en este caso también la derivada espacial de la temperatura en el extremo de la barra será proporcional a la potencia entregada.

La experiencia en que se analiza el comportamiento del sistema cuando se lo somete a una aplicación de potencia oscilatoria se analiza sólo según el modelo no aislado.

Si el sistema se fuerza de tal manera que la temperatura en un extremo varía en la forma :

$$T(x=L,t) = T_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + T_m$$

Para la solución se propone :

$$T(x,t) = A(x) \cdot \cos(\omega \cdot t + c \cdot x) + T_m(x) \quad [7]$$

Se obtienen las siguientes relaciones entre los coeficientes :

$$A(x) = A_0 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$c^4 - \beta \cdot c^2 - \omega^2 / (2\alpha)^2 = 0$$

Se obtiene además para la temperatura media una distribución como la mencionada para el caso de aplicación de potencia constante.

2. ARREGLO EXPERIMENTAL. Para realizar el estudio se utilizaron dos barras, una de bronce (57 cm de largo) y

otra de cobre (65 cm de largo). Los termómetros se introducen según: cuatro sobre el lado derecho de la barra (del lado del soldador) separados por 5 cm; y dos sobre el lado izquierdo (donde se halla el reservorio térmico) separados 5 cm del extremo izquierdo y entre sí. Un esquema del arreglo experimental utilizado se puede apreciar en la figura 1.

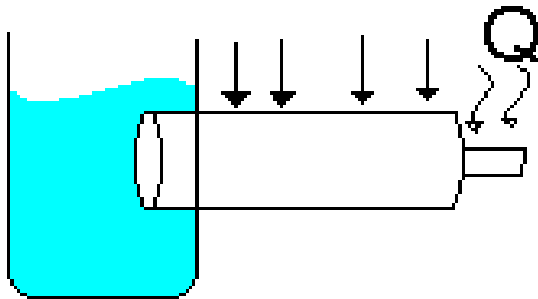


Figura 1. Esquema del dispositivo experimental. Las flechas simbolizan los termómetros utilizados (6 en total)

La barra metálica es apoyada sobre soportes de madera (para que no absorban calor), uno de sus extremos está torneado de manera que entre en el orificio de un soldador eléctrico que actuará como fuente de potencia. El soldador es alimentado con un variac, lo que permite variar la energía entregada para medir diferentes estacionarios así como para darle forma oscilatoria. El otro extremo se introduce en una botella plástica en la que se pone agua con hielo de manera de dejar la temperatura fija en él.

También se estudia la evolución temporal del enfriamiento cuando se calienta la barra de manera homogénea en un horno eléctrico. Esto se hace para medir el coeficiente de Newton.

Medición de la temperatura. Para medir temperaturas se usan transistores del tipo LM34 de la empresa National. Estos son introducidos en orificios practicados a lo largo de la barra. Estos termómetros entregan una tensión que es proporcional a la temperatura en que se hallan, como

se indica en la hoja de datos que proporciona la empresa¹. Esta tensión es adquirida mediante el conversor analógico digital MPLI. Para calibrar estos termómetros se comparan sus lecturas con termómetros de mercurio. Se obtiene que entregan una tensión de aproximadamente 10mV/°C. De todas formas, se calibran en forma independiente.

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS. Todos los gráficos presentados corresponden a la barra de bronce. Como se comentó en la introducción, no hubo diferencia entre los casos aislado y no aislado. Esto puede apreciarse en el gráfico 1, que compara las situaciones estacionarias para el mismo valor de tensión sobre el soldador.

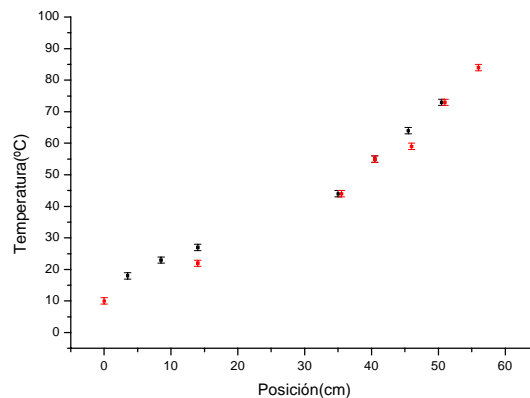


Gráfico 1. Comparación entre los resultados de la barra aislada (negro) y no aislada (rojo).

Aplicación de potencia constante. En el gráfico 2 se pueden apreciar estacionarios para diferentes potencias aplicadas. Las líneas rojas corresponden al ajuste según el modelo en que hay disipación al medio ambiente. La línea negra corresponde a la distribución de

¹ La hoja de datos puede consultarse en www.national.com

temperaturas esperada en el caso aislado suponiendo la aplicación de la potencia correspondiente a la del estacionario con mayor temperatura. Ya que la pendiente de esta en su extremo es proporcional a la potencia entregada y que la predicción para el caso aislado es una recta, sólo se tuvo que trazar una recta cuya pendiente fuera igual a la del estacionario mencionado en evaluada en su extremo. Se aprecia que el modelo no aislado ajusta bien los datos, mientras que el aislado predice no sólo una dependencia funcional incorrecta sino además una temperatura mucho mayor a la obtenida.

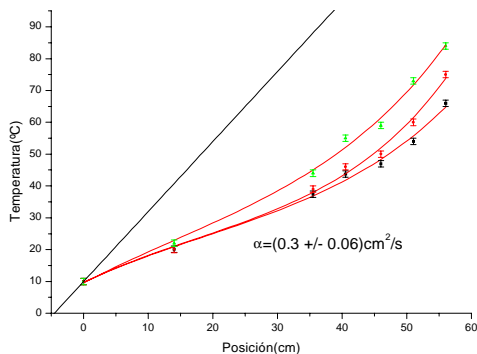


Gráfico 2. Distintos estacionarios para diferentes potencias entregadas. Los puntos son los datos experimentales. Ajustes teóricos en rojo (fórmula [6]). La línea negra es el ajuste con el modelo aislado.

El gráfico 3 representa el decaimiento de la temperatura de la barra al calentársela de manera homogénea ajustado con una exponencial. De aquí se deduce el coeficiente de Newton.

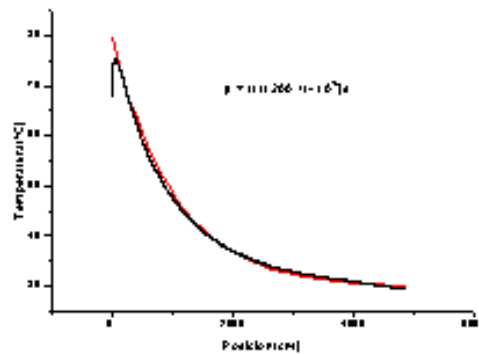


Gráfico 3. Enfriamiento de Newton de la barra.

De los datos obtenidos se deduce que la constante de difusión es:

$$\alpha_{\text{bronce}} = (0,30 \pm 0,06) \text{ cm}^2/\text{s}$$

Que está en el orden, si bien no coincide, con la que figura en tablas ($\alpha_{\text{teórico}} = 0,656 \text{ cm}^2/\text{s}$).

Una operación similar se repitió utilizando una barra de cobre. El valor obtenido para el coeficiente de difusión resulta ser:

$$\alpha_{\text{Cu}} = (0,25 \pm 0,05) \text{ cm}^2/\text{s}$$

Mientras que el de tablas es:

$$\alpha_{\text{teórico}} = 1,2 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Aplicación de potencia alterna. El gráfico 4 presenta la temperatura en función del tiempo cuando a la barra se aplica una potencia alterna en forma de pulsos cuadrados, y período 800 s. Estos datos son ajustados según la fórmula [7] (en azul).

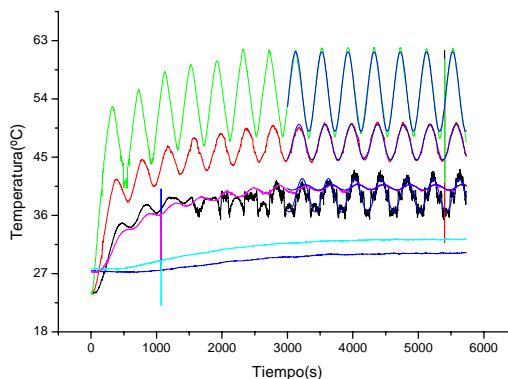


Gráfico 4. Evolución temporal de la temperatura en función del tiempo. Se muestran las mediciones de los 6 termómetros utilizados. En azul se muestra el ajuste teórico de acuerdo a la fórmula [7]

Hay que notar que la línea negra corresponde a un termómetro que no funciona correctamente, pero cuyas mediciones sirven de todas maneras para conocer la fase.

Se encuentra que las temperaturas medias ajustan un estacionario para aplicación de potencia constante. El gráfico 5 y el 6 representan respectivamente la amplitud de la oscilación y la fase en función de la posición. Ambos son ajustados, con los parámetros libres, según la predicción de la teoría.

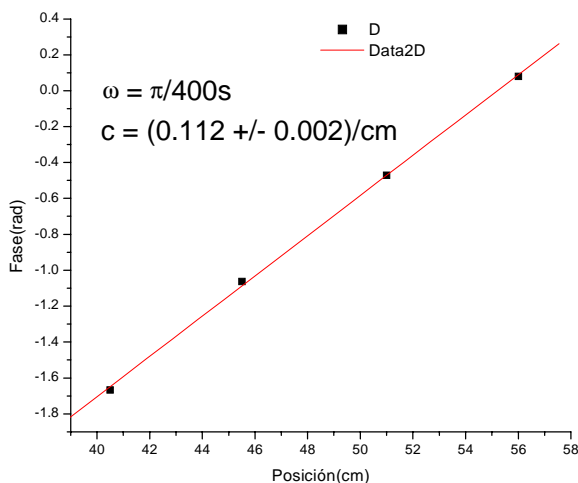


Gráfico 5. Fase en función de la posición. El ajuste lineal es satisfactorio como se expuso en la introducción.

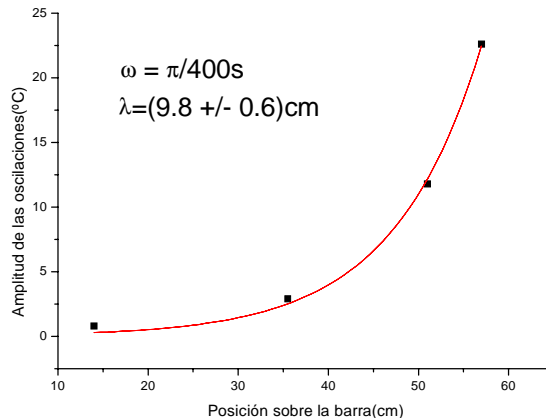


Gráfico 6. Amplitud de las oscilaciones en función del tiempo. Ajuste según el modelo exponencial, como se explicó en la introducción. La potencia se aplica del lado derecho de la barra.

De los parámetros obtenidos se deduce para la difusión un valor consistente con el de el caso A pero con un error menor.

$$\alpha = (0,32 \pm 0,02) \text{ cm}^2/\text{s}$$

Régimen transitorio. En el gráfico 7 se representa la evolución temporal de la temperatura en el punto $X = 56\text{cm}$ (cerca del soldador).

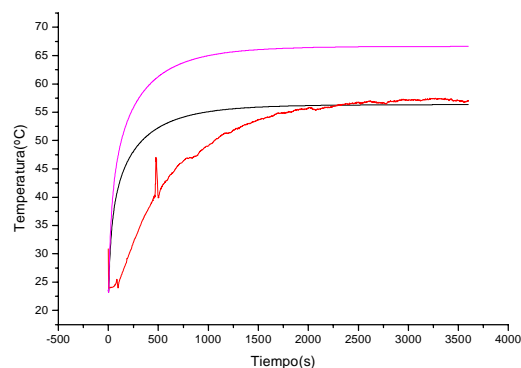


Gráfico 7. Evolución temporal en el caso de aplicación de potencia constante (rojo) y ajustes según los distintos modelos (aislado magenta, y no aislado en negro).

La línea roja corresponde a los datos experimentales, la azul y la magenta a los ajustes según el modelo no aislado y aislado respectivamente. Se modificó la

escala del aislado con el fin de representarlo en el gráfico. El valor final de la temperatura en este caso se puede ver en el gráfico 1.

Ninguno de los modelos aplicados explica correctamente el comportamiento transitorio así se usen las constantes obtenidas mediante el método estacionario como las encontradas en tabla.

4. CONCLUSIONES. Se estudió el comportamiento del sistema para el caso estacionario encontrándose que el modelo no aislado lo explica mejor que el aislado. Las constantes de difusión encontradas difieren de las de tablas tanto para el caso de la barra de bronce como para el de la de cobre, si bien ambas están en el mismo orden. Siendo el cobre puro se descarta que esta desavenencia se deba a la inexactitud en la composición del bronce, (que es una aleación).

Los resultados obtenidos en el caso oscilatorio son consistentes con los del recién mencionado.

Ninguno de los modelos, ni con las constantes obtenidas ni con las de tablas, parece ajustar correctamente el comportamiento transitorio. Cabe la hipótesis de que esto se deba a un problema numérico en la modelización que no es de solución trivial. Las fórmulas 4 y 10 son sumas que no decrecen rápidamente por lo que no pueden ser truncadas en los primeros términos. Son por otro lado prácticamente alternadas y es sabido que la suma alternada de términos similares conlleva problemas numéricos. Es de notar al respecto que los coeficientes correspondientes a frecuencias espaciales mayores decaen más rápidamente, por lo que la suma obtenida se acerca más a la correcta. Pasa efectivamente que para

tiempos grandes la suma converge al valor esperado. Se recomienda un análisis más exhaustivo desde el punto de vista numérico.

Si el problema aún así persistiere se recomienda una modificación en la ecuación de difusión con disipación de Newton que involucre derivadas temporales de orden mayor o potencias de estas, de tal manera que en los casos estacionarios, los resultados predichos, que se muestran correctos, sigan valiendo.

5. BIBLIOGRAFÍA:

- [1] *Analytical Heat Diffusion Theory*, Luikov A.V, Academic Press, London, 1968.
- [2] *Basic Heat Transfer*, Örzziç N. Nrcati, 1 ed. Prentice Hall.
- [3] *Elementary Applied Partial Differential Equations*, R. Haberman, 2 ed. Prentice Hall International.
- [4] Transferencia de Calor - D.R. Pitts y L.E. Sismo- Mc Graw Hill - Bogotá-1979
- [5] On the relation between heat flux and temperature gradients-S. Simons - Am.J.Phys. **54**, (1048) 1986.
- [6] Heat conduction in a metallic rod with Newtonian losses - I. Rafols and J. Ortin- Am. J. Phys. **60**, 846 (1992)
- [7] On heat conduction in one-dimensional solids- A. Diaz-Guilera - Am. J. Phys. **58**, 779 (1990)
- [8] An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves-A. Bodas, V.Gándia and E. López-Baeza Am.J.Phys. **66**, 528 (1998).