

Estudio del movimiento de caída de esferas – Efecto del roce con el aire

Ignacio Arata¹, Mauricio Valli² y Alejandro Viegner³

¹arataej@sinectis.com.ar, ²mauriciolaplata@sinectis.com.ar, ³alevieg@yahoo.com

Facultad de Ingeniería, Ciencias Exactas y Naturales

Universidad Favaloro, Av. Belgrano 1723, C. A. de Buenos Aires, Argentina

Resumen

Estudiamos el movimiento de caída de esferas de poliuretano expandido (telgopor). Determinamos el tipo de movimiento mediante mediciones de desplazamiento en función del tiempo, calculamos la velocidad terminal y el coeficiente de arrastre debido al roce con el aire. Comparamos y discutimos con otros resultados.

Introducción

En este experimento estudiamos el movimiento de caída de esferas de baja densidad (en este caso, de poliuretano expandido) desde una altura de alrededor 2,5 metros. Para realizarlo utilizamos dos esferas de distinto diámetro y un sistema de medición, como se muestra en la figura 1.

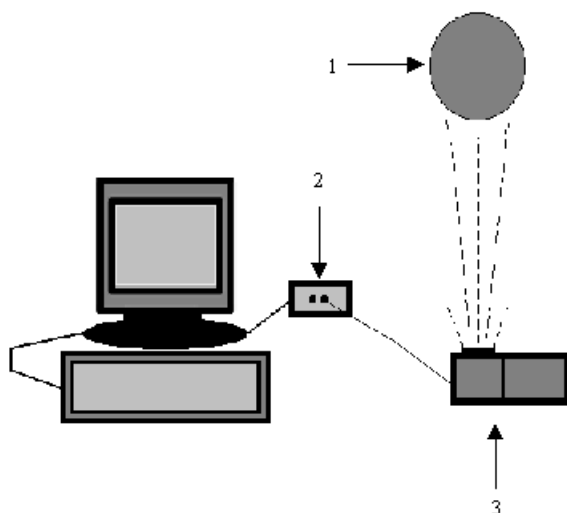


Figura 1: Esquema del sistema de medición: esfera (1), MPLI (2), sensor de movimiento (3) y computadora.

El sistema de medición consta de un sensor de movimiento, un sistema de adquisición de datos (en nuestro caso un MPLI) y una computadora. La idea es soltar la esfera y medir el desplazamiento en función del tiempo con el sensor de movimiento y transferir los datos a una planilla de cálculo para hacer un análisis de los mismos. También obtenemos la velocidad a partir de la curva de desplazamiento, derivándola respecto del tiempo.

El experimento consta de cuatro etapas: i) determinación del tipo de movimiento, ii) cálculo de las constantes, iii) cálculo del coeficiente de arrastre y iv) análisis de los resultados.

Primera parte : Determinación del modelo de movimiento

En primer lugar propusimos como modelo de movimiento la caída libre, donde la única fuerza que actúa es el peso y la aceleración es constante. Considerando que el empuje del aire es despreciable, las ecuaciones del movimiento son :

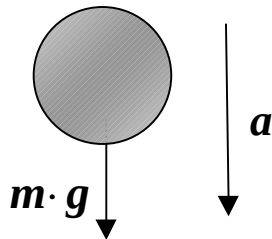


Figura 2: Diagrama de fuerzas de este modelo de movimiento

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{t} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{g}) \quad (2)$$

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{A})^2 \cdot (\mathbf{g}) + \mathbf{B} \quad (3)$$

donde **a** es la aceleración del cuerpo, **g** es la aceleración de la gravedad, **v** es la velocidad del cuerpo, **t** es el tiempo, **y** la distancia que recorre, **A** y **B** son dos constantes de integración. Para más información sobre estas ecuaciones ver el Apéndice A.

Para ver si este modelo puede representar los datos experimentales, realizamos un gráfico con las curvas de la distancia y la velocidad del cuerpo, ambas en función del tiempo, de los datos experimentales y teóricos. Además, tratamos de ajustar lo mejor posible los datos de las curvas teóricas a las experimentales (ver figura 3).

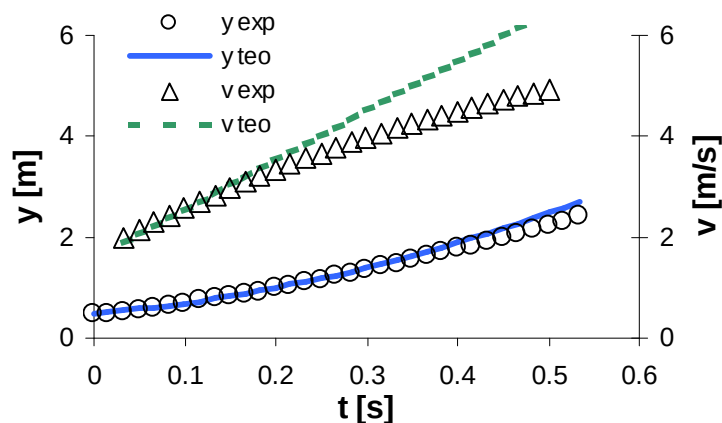


Figura 3: Gráficos de la distancia y la velocidad en función del tiempo, curvas experimentales (símbolos) y teóricas (líneas).

Podemos ver que este modelo de movimiento que hemos propuesto no ajusta con los valores experimentales.

En segundo lugar propusimos un movimiento basado en la Ley de Stokes, donde además de la fuerza producida por el peso, existe una fuerza de rozamiento producida por la viscosidad del aire, la cual es proporcional a la velocidad. Las ecuaciones que describen a las fuerza que interactúan en este movimiento son :

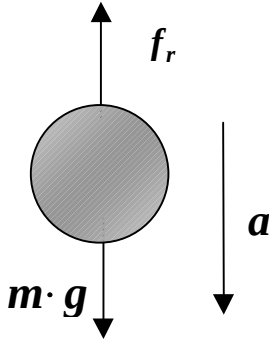


Figura 4: Diagrama de fuerzas de este modelo de movimiento.

$$\mathbf{f_r = m \cdot k \cdot v} \quad (4)$$

$$\mathbf{m \cdot g - m \cdot k \cdot v = m \cdot a} \quad (5)$$

donde **m** es la masa del cuerpo, **a** es la aceleración del cuerpo, **g** es la aceleración de la gravedad, **v** es la velocidad del cuerpo, **k** es una constante a determinar.

Cuando el peso es igual a la fuerza de rozamiento, es decir, cuando la aceleración es cero, el objeto alcanza una velocidad terminal constante (**v_t**).

$$\mathbf{m \cdot g - m \cdot k \cdot v_t = 0 \Rightarrow v_t = \frac{g}{k}} \quad (6)$$

Las ecuaciones de movimiento de este modelo son:

$$\mathbf{v = v_t \cdot (1 - e^{((t-A) \cdot (-g/v_t))})} \quad (7)$$

$$\mathbf{y = v_t \left(t + \frac{v_t}{g} e^{((t-A) \cdot (-g/v_t))} \right) + B} \quad (8)$$

donde **t** es el tiempo, **y** la distancia que recorre, **A** y **B** son dos constantes de integración.. Para más información sobre estas ecuaciones ver el Apéndice B.

Para analizar este modelo, procedimos de manera similar al caso anterior, es decir, realizamos un gráfico con las curvas de la distancia y la velocidad del cuerpo, en función del tiempo, de los datos experimentales y teóricos. Además tratamos de ajustar lo mejor posible los datos de las curvas teóricas a las experimentales (ver figura 4).

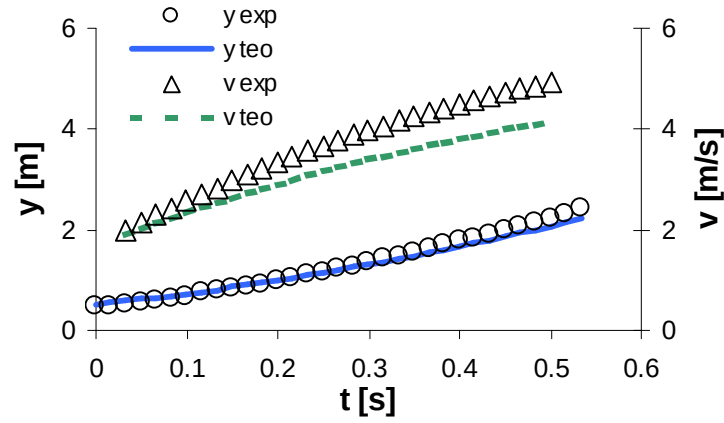


Figura 5: Gráfico de la distancia y la velocidad en función del tiempo, curvas teóricas y experimentales.

Este modelo de movimiento ajusta mejor que el anterior, pero no es suficientemente bueno. Por lo tanto la Ley de Stokes no funciona en este caso con un fluido como el aire.

En tercer lugar propusimos un modelo de movimiento con una fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad. Las ecuaciones que rigen a este movimiento son :

$$f_r = m \cdot k \cdot v^2 \quad (9)$$

$$m \cdot g - m \cdot k \cdot v^2 = m \cdot a \quad (10)$$

$$m \cdot g - m \cdot k \cdot v_t^2 = 0 \Rightarrow v_t^2 = \frac{g}{k} \quad (11)$$

$$v = v_t \cdot \tanh\left((t - A) \cdot \frac{g}{v_t}\right) \quad (12)$$

$$y = \frac{v_t^2}{g} \cdot \ln(\cosh((t - A) \cdot \frac{g}{v_t})) + B \quad (13)$$

donde **m** es la masa del cuerpo, **a** es la aceleración del cuerpo, **g** es la aceleración de la gravedad, **v** es la velocidad del cuerpo, **k** es una constante a determinar, **v_t** es la velocidad terminal, **t** es el tiempo, **y** la distancia que recorre, **A** y **B** son dos constantes de integración. Para más información sobre estas ecuaciones ver el Apéndice C.

Como en los casos anteriores volvimos a realizar los gráficos correspondientes. Los resultados son los de la figura 6.

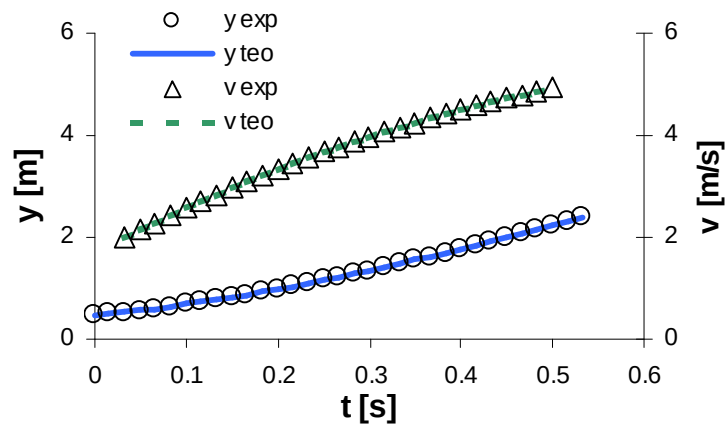


Figura 6: Gráfico de la distancia y la velocidad en función del tiempo, curvas teóricas y experimentales.

Este modelo de movimiento es el que presenta un mejor ajuste a nuestros datos experimentales.

Segunda parte : Cálculo de las constantes

Se realizó el experimento con dos esferas de telgopor de distinto diámetro, una de 21 cm y otra de 36 cm. Se tomaron alrededor de 20 mediciones distintas para cada esfera. Los valores de las constantes, que se muestran más adelante, son un promedio de los ajustes manuales que producían el menor error entre los valores experimentales y los teóricos de cada medición.

Los valores obtenidos para la esfera de 21 cm de diámetro (usando $g = 9.8 \text{ m/s}^2$) son:

$$v_t = 5.223 \pm 0.024 \cdot \text{m/s}$$

$$k = v_t^2 \cdot g = 0.359 \pm 0.057 \cdot \text{m}^{-1}$$

Los valores obtenidos para la esfera de 36 cm de diámetro son :

$$v_t = 6.133 \pm 0.061 \cdot \text{m/s}$$

$$k = v_t^2 \cdot g = 0.261 \pm 0.097 \cdot \text{m}^{-1}$$

Tercera parte : Cálculo del coeficiente de arrastre

Otra forma de escribir la fuerza de rozamiento es:

$$f_r = m \cdot k \cdot v^2 = B \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho_a \cdot A \cdot v^2 \quad (14)$$

donde **B** es una constante que utilizamos como paso intermedio para llegar a la otra expresión, **C_d** es el coeficiente de arrastre, **ρ_a** es la densidad del aire.

Los valores de **B** y **C_d** para la esfera pequeña, de área **A** = 0.035 m², masa **m** = 0.047 kg y usando como densidad del aire **ρ_a** = 1.1745 kg/m³ y a 27 °C son:

$$B = m \cdot k = 0.017 \pm 0.003 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$C_d = 2 \cdot \frac{B}{\rho_a \cdot A} = 0.83 \pm 0.01$$

Mientras que para la esfera grande, con **A** = 0.102 m² y **m** = 0.172 kg:

$$B = m \cdot k = 0.045 \pm 0.016 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$C_d = 2 \cdot \frac{B}{\rho_a \cdot A} = 0.75 \pm 0.01$$

Cuarta parte : Análisis de los resultados

Comparamos nuestros resultados con los de otros experimentos y vimos que el coeficiente de arrastre obtenido, en algunos de estos experimentos (Ref. [1, 2, 4]) es **C_d** = 0,4, mientras que el calculado por nosotros es casi el doble, similar al calculado para una elipsoide por uno de éstos (Ref [4]).

En primer lugar supusimos que un error era introducido por una roldana y un hilo que usábamos como guía para que nuestra esfera tuviese un recorrido mejor. Para sacarnos nuestras dudas volvimos a realizar el experimento sin la roldana y el hilo, dejando caer a la esfera sin este vínculo. Los resultados obtenidos fueron similares a los anteriores, por lo tanto no podemos atribuirle la discrepancia a la misma. No obstante, nuestros resultados concuerdan con los de otros experimentos (Ref. [3]), es decir, existe una cierta disparidad entre estos valores.

Conclusiones

Podemos concluir con este experimento, que el modelo de caída libre y el modelo fundado en la Ley de Stokes, no funcionan en estas condiciones con un fluido como el aire, y sí ajusta el basado en una fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad. Obtenemos un acuerdo parcial entre los valores obtenidos del coeficiente de arrastre C_d y otros resultados de la bibliografía.

Referencias

1. James A. Lock, "The physics of air resistance", *The Physics Teacher*, 158 (1982).
2. M. E. Brandan, M. Gutiérrez, R. Labbé, and A. Menchaca-Rocha, "Measurement of the terminal velocity in air of a Ping-Pong ball using a time-to-amplitude converter in the millisecond range", *Am. J. Phys.* **52**, 890 (1984).
3. Mark Peastrel, R. Lynch, and A. Armenti, "Terminal velocity of a shuttlecock in vertical fall", *Am. J. Phys.* **48**, 511 (1980).
4. Drag coefficient for bodies of revolution (Adapted from L. Prandtl, *Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen*, R. Oldenbourg, Munich and Berlin, 1923, p. 29; and F. Eisner, "Das Widerstandsproblem," Proc. 3d Intern. Congr. Appl. Mech., 1930, p. 32).

Apéndice A: Caída libre

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Integramos la ecuación de movimiento para obtener la velocidad del objeto en cualquier instante.

$$\int d\mathbf{t} = \int \frac{1}{g} d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{v} = (\mathbf{t} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{g})$$

Integrando la velocidad obtenemos la posición en función del tiempo.

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{A})^2 \cdot (\mathbf{g}) + \mathbf{B}$$

Apéndice B: Fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_t = \frac{g}{k}$$

Integramos la ecuación de movimiento para obtener la velocidad del objeto en cualquier instante.

$$\int d\mathbf{t} = \int \frac{1}{g - k \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 - \frac{k}{g} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 - \mathbf{v} / \mathbf{v}_t} d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{t} = \frac{-\mathbf{v}_t}{g} \cdot \ln\left(\frac{-\mathbf{v}}{\mathbf{v}_t} + 1\right) + \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_t \cdot (1 - e^{((\mathbf{t}-\mathbf{A}) \cdot (-g/\mathbf{v}_t))})$$

Integrando la velocidad obtenemos la posición en función del tiempo.

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}_t \left(\mathbf{t} + \frac{\mathbf{v}_t}{g} e^{((\mathbf{t}-\mathbf{A}) \cdot (-g/\mathbf{v}_t))} \right) + \mathbf{B}$$

Apéndice C: Fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad

$$f_r = m \cdot k \cdot v^2$$

$$m \cdot g - m \cdot k \cdot v^2 = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$m \cdot g - m \cdot k \cdot v_t^2 = 0 \Rightarrow v_t^2 = \frac{g}{k}$$

Integramos la ecuación de movimiento para obtener la velocidad del objeto en cualquier instante.

$$\int dt = \int \frac{1}{g - k \cdot v^2} dv = \frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 - \frac{k}{g} \cdot v^2} dv = \frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 - v^2 / v_t^2} dv$$

$$t = \frac{v_t}{g} \cdot \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) + A \Rightarrow v = v_t \cdot \operatorname{tgh}\left((t - A) \cdot \frac{g}{v_t}\right)$$

Integrando la velocidad obtenemos la posición en función del tiempo.

$$y = \frac{v_t^2}{g} \cdot \ln(\cosh((t - A) \cdot \frac{g}{v_t})) + B$$