

# Experimentos con objetos que caen con aceleración mayor que $g$



Silvia E. Calderón<sup>1</sup>, y Salvador Gil<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Superior del Profesorado J.V. González, Ayacucho 632, Ciudad de Buenos Aires.

<sup>2</sup>Universidad Nacional de San Martín, Campus Miguelete, M. de Irigoyen 3100, San Martín (1650), San Martín, Buenos Aires.

E-mail: [sgil@unsam.edu.ar](mailto:sgil@unsam.edu.ar)

(Recibido el 7 de Abril de 2011; aceptado el 28 de Junio de 2011)

## Resumen

Cuando se deja caer una barra que pivotea por una de sus puntas, el extremo libre, bajo ciertas condiciones, cae con una aceleración vertical mayor que  $g$ . Esta es una demostración sorprendente que se conoce desde hace tiempo. En este trabajo presentamos un experimento simple que permite medir con precisión el movimiento de caída del extremo libre y comparar los resultados experimentales con las predicciones teóricas.

**Palabras clave:** Caída libre, rotación de un cuerpo rígido, experimentos de bajo costo, Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's).

## Abstract

When we drop the free end of a bar that pivots on the other end, under certain conditions, the vertical acceleration of the free end is greater than  $g$ . This is a striking demonstration that has been known for some time. Here we present a simple experiment to measure accurately the movement of the free end of the bar and compare the experimental results with the corresponding theoretical predictions.

**Keywords:** Free fall, rigid body rotation, low cost experiment, Information and Communication Technologies (ICT's).

**PACS:** 7.05.-t, 01.50.H, 45.20.-d, 01.50.Lc, 01.50.My, 01.50.Pa

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

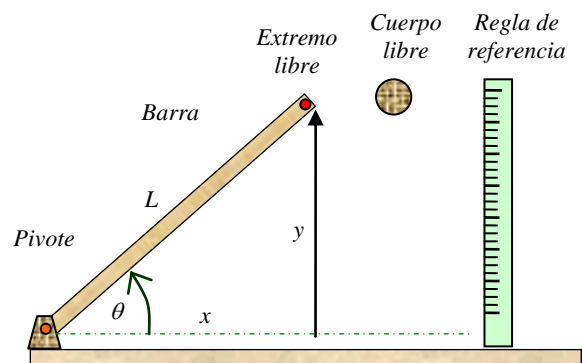
Desde los albores de la física, el movimiento de caída libre no ha dejado de cautivar a legos y expertos. Aún hoy, en cualquier clase de física la discusión de la caída de los cuerpos, con la recreación de los argumentos de Aristóteles y Galileo, es un tópico disparador de ávidas discusiones [1]. Además es un tema clásico que brinda la oportunidad de estimular el interés de los estudiantes por la ciencia y plantea la necesidad de cuestionar nuestros preconceptos [2].

Una demostración que puede contribuir a llamar aún más la atención de los estudiantes por estos tópicos, es la observación de que existen objetos que caen con aceleración mayor que  $g$ , la aceleración de caída de un cuerpo libre en ausencia de roce.

La observación que un objeto caiga más lentamente que otro en caída libre, puede ser entendido intuitivamente apelando a los efectos de roce. Sin embargo, cuando un cuerpo cae más rápido que otro en caída libre, nos sorprende y este hecho desafía nuestra intuición.

En la Fig. 1 se ilustra esta demostración clásica [3, 4, 5, 6] consistente en una barra con un extremo que puede pivotear de un gozne, libre de roce. Bajo ciertas condiciones, el extremo libre cae con una aceleración cuya

componente vertical es mayor que  $g$  [3, 4]. Es posible visualizar esta demostración en videos [7] y applets de simulación [8]



**FIGURA 1.** Esquema del experimento para estudiar el movimiento de caída de una barra que pivotea, con roce despreciable, de uno de sus extremos.

El objetivo de este artículo es desarrollar un experimento simple y de bajo costo, que permite realizar mediciones cuantitativas del movimiento de caída de la barra y

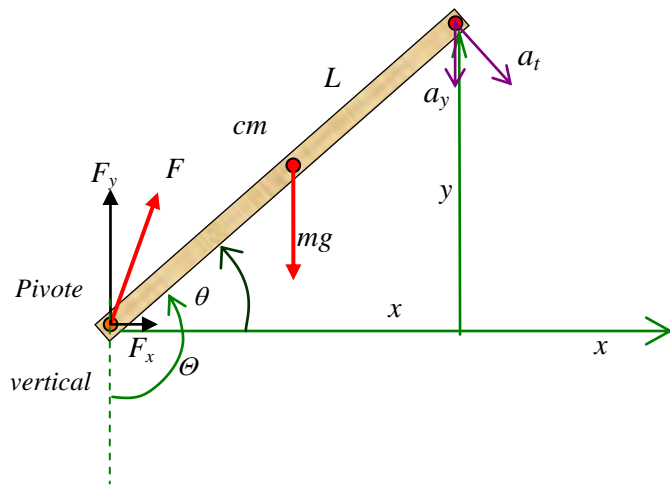
comparar los resultados experimentales con los modelos teóricos pertinentes. Creemos que esta propuesta puede ser de utilidad para ampliar la lista de experimentos simples, fáciles de realizar y con interesantes desafíos, adecuados para estudiantes de los cursos introductorios de física universitaria.

Existen al menos dos formas posibles de realizar este experimento. La más común consiste en apoyar el cuerpo en el extremo libre de la barra y observar que en algún momento de la caída, el cuerpo “se despega” de la barra. Esto ocurre cuando la aceleración de la barra supera a la del cuerpo en caída libre, o sea es mayor que  $g$  [3, 4, 5]. Otra forma de realizar este experimento, y es la que estudiamos en este artículo, es cuando se hace que el cuerpo y la barra caigan en forma independiente uno del otro. En este caso se observa directamente cuando la barra se adelanta al cuerpo en su caída.

## II. MODELO TEÓRICO

Consideremos el movimiento de una barra, con uno de sus extremos fijo a un pivote sin roce, que se libera de una cierta altura, caracterizada por el ángulo  $\theta_0$ , (ver Fig. 2). Para fijar ideas supondremos que la barra tiene longitud  $L$  y masa  $m$ . Suponemos que la distancia del pivote al centro de masa de la varilla es  $\lambda.L$ , con  $\lambda < 1$  y su momento de inercia respecto del pivote es  $I = \beta mL^2$ . Para una barra uniforme  $\lambda = 1/2$  y  $\beta = 1/3$ . El único grado de libertad de la barra es su orientación que viene determinada por el ángulo  $\theta$ , medido a partir de la línea horizontal que pasa por el pivote.

Las fuerzas ejercidas sobre la varilla son su peso  $mg$  y la fuerza de reacción  $F$  del pivote. En la Fig. 2 se muestra un diagrama esquemático de dichas fuerzas.



**FIGURA 2.** Diagrama de fuerzas sobre la barra que cae. La distancia del pivote al centro de masa (cm) es  $\lambda L$ . El momento de inercia de la barra respecto del pivote es  $\beta mL^2$   $F$  es la fuerza de reacción del pivote sobre la barra.

Para analizar los torques tomamos el pivote como punto de referencia. El torque neto (momento neto) sobre la barra es:

$$\tau = \lambda Lmg \cos \theta. \quad (1)$$

La ecuación de movimiento de la barra es:

$$\tau = I.\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \lambda Lmg \cos \theta. \quad (2)$$

En esta expresión  $\alpha = d\omega/dt$  es la aceleración angular de la barra y  $\omega = d\theta/dt$  su velocidad angular. Por lo tanto:

$$\alpha \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\lambda}{\beta L} g \cos \theta = \omega_0^2 \cos \theta, \quad (3)$$

siendo  $\omega_0^2 \equiv \lambda g/\beta L$ , una constante que depende de la forma geométrica de la barra y del valor de  $g$ . Para una barra uniforme,  $\omega_0^2 \equiv 3g/2L$ . Integrando esta ecuación obtenemos:

$$\omega^2(t) = 2\omega_0^2 (\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta) + \omega_{00}^2, \quad (4)$$

siendo  $\theta_0$  y  $\omega_{00}$  los valores de ángulo y la velocidad angular inicial ( $t = 0$ ) de la barra, respectivamente. Esta ecuación diferencial no puede resolverse analíticamente por métodos elementales, sin embargo su solución, es decir  $\theta(t)$ , puede expresarse en términos de integrales elípticas (Apéndice A) [9]. Con las computadoras modernas es sencillo integrar numéricamente la ecuación (Ec.) (4) y obtener los valores de  $\theta(t)$  que pueden compararse con los valores medidos experimentalmente, como así también los tiempos de caída en función de  $\theta_0$ .

Otra alternativa para llegar a la ecuación de movimiento de la barra es utilizar consideraciones energéticas. La energía mecánica es la suma de las energías potencial y cinética, siendo la energía potencial de la barra,  $E_p$ , equivalente a la que tiene una masa puntual  $m$  que está a una altura  $\lambda L \text{sen}(\theta)$ . Esto es:

$$E_p = mg \lambda L \text{sen}\theta. \quad (5)$$

La energía cinética  $K$  de la barra, corresponde a un cuerpo de momento de inercia  $I (= \beta mL^2)$  en rotación alrededor del pivote.

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (\beta mL^2) \omega^2. \quad (6)$$

Por lo tanto:

$$E_0 = E_p + K = mg\lambda L \text{sen}\theta + \frac{1}{2}(\beta mL^2)\omega^2. \quad (7)$$

Si en  $t = 0$ :  $d\theta/dt = \omega_{00}$  y  $\theta = \theta_0$ , tenemos:

$$E_0 = mg\lambda L \text{sen}\theta_0 + \frac{1}{2}(\beta mL^2)\omega_{00}^2. \quad (8)$$

De estas dos últimas ecuaciones obtenemos nuevamente la ecuación de movimiento (4).

Es interesante destacar que físicamente, el movimiento de la barra pivoteando en un eje horizontal (Fig. 2) es esencialmente la ecuación diferencial de un péndulo físico. Sin embargo, resulta llamativo que la ecuación de movimiento que estudiamos en este trabajo, Ec. (3), difiera de la correspondiente a un péndulo físico [9]. La razón de la aparente diferencia, está en la forma de definir el ángulo. En el caso del péndulo el ángulo se mide a partir del eje vertical que pasa por el pivote, ángulo  $\Theta = \theta + \pi/2$  en la Fig. 2. Recordando que  $\cos\theta = -\text{sen}(\theta + \pi/2)$ , la Ec. (3) se puede escribir como:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \text{sen}\Theta, \quad (9)$$

que es la ecuación diferencial del un péndulo [9]. Es interesante señalar que para el péndulo, usualmente estamos interesados en estudiar el caso de pequeñas elongaciones ( $\Theta \approx 0$ ) donde la Ec. (9) tiene solución analítica, ya que en este caso vale la aproximación  $\text{sen}\Theta \approx \Theta$ . En el caso de la barra, nuestro interés se centra en las grandes oscilaciones, donde ( $\Theta > \pi/2$ ).

### A. Integración de la ecuación de movimiento

Para calcular  $\theta(t)$  proponemos un método numérico de fácil aplicación con cualquier hoja de cálculo en una computadora. La idea es determinar el intervalo de tiempo  $\Delta t$  que tardó la barra en desplazarse un ángulo  $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$ . De este modo es posible determinar el instante  $t_i$  en el que la barra alcanza un ángulo  $\theta_i$ .

Para ello, en la primera columna de la hoja de cálculo escribimos  $\theta$ , variando desde 0 al valor  $\theta_0$  en pasos de una décima de grados o menos. Usando la Ec. (4), en la segunda columna calculamos el valor  $\omega(\theta)$  correspondiente al valor de  $\theta$  de dicha fila. En la tercera columna calculamos el valor de  $\Delta t = \Delta\theta/\omega(\theta)$ , para ir de un valor de  $\theta$  a  $\theta + \Delta\theta$  (de una fila a la siguiente). En la cuarta columna, se suman los incrementos de tiempo, partiendo de  $t=0$  para el ángulo  $\theta_0$ . De este modo en la columna cuarta tenemos el tiempo  $t$ , en la primera  $\theta(t)$  y en la segunda  $\omega(t)$ . El proceso descrito puede implementarse fácilmente utilizando cualquier planilla de cálculo, o bien puede bajarse de Internet un ejemplo en Excel [10].

Comparamos el movimiento de la barra con un cuerpo en caída libre, a lo largo de una dirección vertical (eje y). Resulta de interés analizar la aceleración tangencial,  $a_t$  del extremo libre de la barra [7, 8]. En el caso de la barra, esta aceleración se puede escribir como:

$$a_t = \alpha L. \quad (10)$$

Siendo  $\alpha$  la aceleración angular dada por la Ec. (3). Esta aceleración es perpendicular a la barra. De la Fig. 2, se desprende que la componente vertical de la aceleración del extremo libre de la barra es:

$$a_y = a_t \cos\theta = L\omega_0^2 \cos^2\theta. \quad (11)$$

Para una barra uniforme, vemos que su extremo libre cae con una componente vertical de su aceleración:

$$a_y(\text{extremo}) = \frac{3}{2}g \cos^2\theta. \quad (12)$$

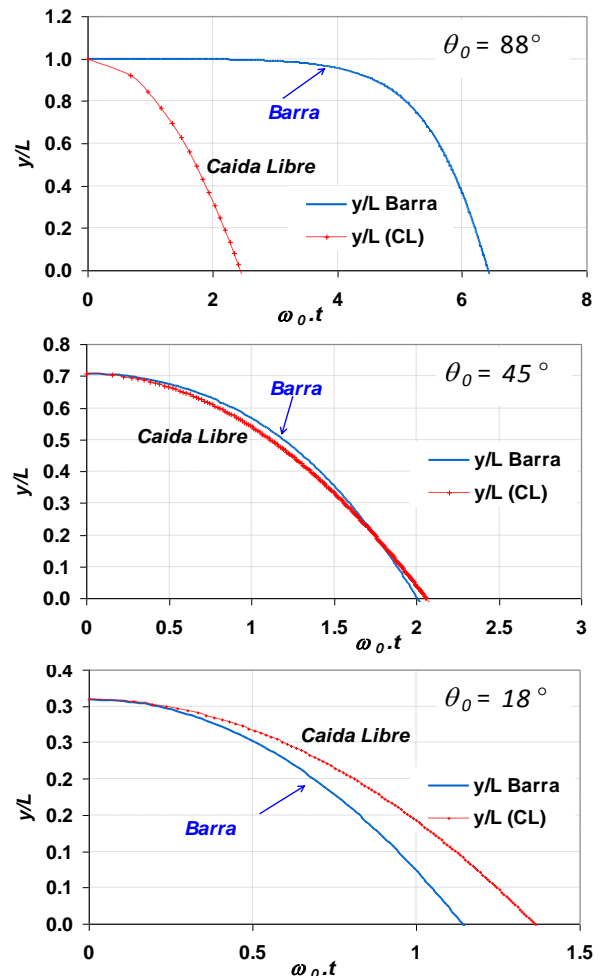


FIGURA 3. Las cruces (rojas) corresponden al movimiento de un cuerpo en caída libre. La línea continua (azul), describe el

movimiento vertical del extremo de una barra que pivotea alrededor del otro extremo. En el panel superior se comparan ambos movimientos para un ángulo inicial  $\theta = 88^\circ (\approx \pi/2)$ . En el panel medio tenemos el caso de  $\theta = 45^\circ$  y en el panel inferior, para un ángulo inicial  $\theta = 18^\circ (\pi/10)$ .

Para  $\cos \theta \geq \sqrt{2/3}$ , es decir  $\theta < 35^\circ$ , vemos que la aceleración vertical del extremo de la barra es mayor que  $g$ . Si la barra se suelta a partir de un ángulo inicial  $\theta_0 < 35^\circ$ , con seguridad la barra llegará primero al piso que un cuerpo libre cayendo desde la misma altura. Sin embargo, para que la barra llegue al piso primero, no es necesario que la aceleración vertical de la barra sea todo el tiempo mayor que  $g$ . Solo es necesario que en promedio lo sea. Eso hace que aún para ángulos  $48^\circ > \theta > 35^\circ$  la barra llegue al piso antes que un cuerpo en caída libre, como se ilustra en las Figs. 3 y 4.

Es interesante observar asimismo, que el centro de masa de la barra cae con una aceleración vertical:

$$a_y(\text{c.m.}) = \frac{3}{4} g \cos^2 \theta, \quad (13)$$

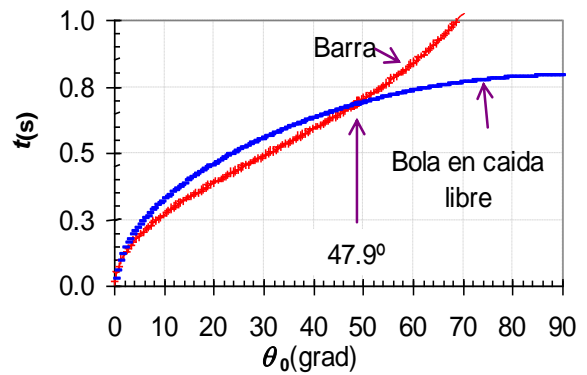
que siempre es menor que  $g$ . Esto está de acuerdo con el hecho físico que en el caso de la barra, esta está siendo solicitada por una fuerza menor a su peso, más precisamente por  $mg - F_y$ . De manera análoga, para una barra no uniforme,

$$a_y(\text{c.m.}) = \frac{\lambda^2}{\beta} g \cos^2 \theta, \quad (14)$$

que siempre será menor que  $g$ , ya que se puede demostrar que  $\lambda^2 \leq \beta$ .

En la Fig. 3 se muestran los resultados de la integración de la Ec. (4), partiendo de un ángulo inicial cercano a  $90^\circ (\pi/2)$ , y para  $\theta_0 = \pi/10 (18^\circ)$ . En cada grafico se compara el movimiento vertical del extremo libre de la barra y el de un cuerpo en caída libre. Se puede comprobar que para ángulos menores a  $48^\circ (0,733)$  el extremo libre de la barra llega al suelo antes que una bola en caída libre desde una altura  $y = L \cdot \sin \theta$ , [8] como se ilustra en el panel medio de la Fig. 3. En esta figura, se utilizó como eje vertical la variable adimensional  $y/L$  y como eje horizontal la variable adimensional  $\tau = \omega_0 t$ . En ese sentido, el tiempo  $T_1^0 = 1/\omega_0 = \sqrt{2L/3g}$ , determina la escala temporal del problema. En otras palabras, la longitud de la barra debe ser seleccionada para poder observar el fenómeno adecuadamente con los instrumentos disponibles. Para una barra de 3m, este tiempo es  $1/\omega_0 \approx 0.45\text{s}$ , lo que permite filmar cómodamente el fenómeno con una cámara que tome unos 30 cuadros por segundos. En la Fig. 4 se comparan los tiempos de caída de una barra de 3m, como función del ángulo inicial  $\theta_0$  con el tiempo de caída de una bola que cae desde la misma altura

que el extremo libre, con aceleración  $g$ . Los detalles del cálculo de caída de la barra se presentan en el apéndice A.



**FIGURA 4.** Comparación de los tiempos de caída de una barra uniforme de longitud  $L = 3\text{m}$  en función del ángulo inicial de la barra con la horizontal  $\theta_0$ , con el tiempo de caída de un cuerpo en caída libre, desde la misma altura que el extremo de la barra.

De esta figura se ve que para un ángulo inicial menor a  $47.9^\circ$ , la barra caerá más rápido de un objeto en caída libre desde la misma altura que el extremo de la barra. Es interesante notar que este ángulo es el mismo independientemente de la longitud de la barra.

### III. EXPERIMENTO

El experimento consta de dos partes. En la primera se dejó caer una barra que pivotea en un extremo y se compara su movimiento con el modelo teórico propuesto. En la segunda parte, se deja caer simultáneamente una barra y una bola maciza de madera, de diámetro  $d \approx 3\text{cm}$ . La barra está apoyada sobre el suelo por su extremo inferior y el roce en el extremo apoyado al piso actúa como pivote.

La bola se ubica a la misma altura que el extremo libre de la barra. En ambos casos, se filman con una cámara digital en modo video y se analizan con algún programa que permita visualizar cuadro a cuadro las imágenes filmadas. En el plano de movimiento de la barra, se introducen objetos de dimensiones conocidas, que se emplea para definir la escala de los fotogramas [12].

La bola utilizada es de pequeño volumen y masa considerable, con la finalidad de que pueda despreciarse el rozamiento mientras cae en el aire desde una altura inferior a los 2m. Se utilizaron dos barras uniformes de madera de  $2.5\text{cm} \times 5\text{cm}$  y longitudes  $L_1 = 3.06\text{m}$  y  $L_2 = 1.83\text{m}$ . Para estas barras uniformes, sus centros de masa coinciden con los centros geométricos de las mismas y sus momentos de inercia respecto del pivote son  $I = \frac{1}{3} M L^2$ . Sobre las

varillas se trazan marcas a distancias conocidas para fijar escalas de referencias y luego se utilizan para determinar las dimensiones y fijar posiciones en los fotogramas.

El experimento se filmó con una cámara Canon PowerShotA 480 que filma 30 cuadros por segundo. Los videos se analizaron con el programa Logger Pro 3.7 de Vernier® [11]. Cabe mencionar que se obtendrían resultados similares si se utilizan programas de uso libre tal como Tracker o Physics Tool Kit [13, 14]. En las Fig. 5 se muestran dos fotogramas del experimento.



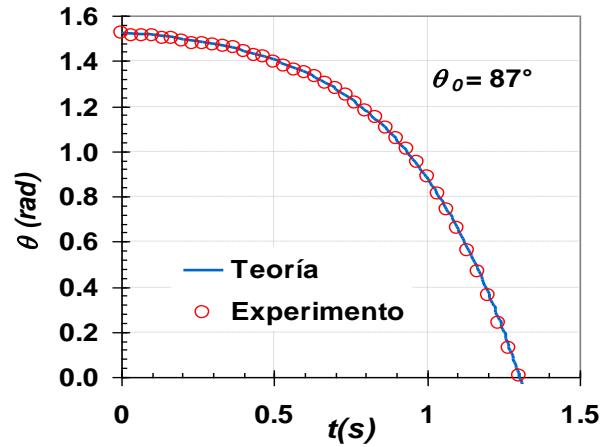
**FIGURA 5.** En la figura superior el fotograma que muestra la bola y la varilla de madera cuando comienzan a caer. La bola y el extremo de la varilla están a la misma altura respecto del suelo y el ángulo inicial de la barra es  $32^\circ$ . En la figura inferior, se observa que durante la caída, el extremo de la varilla avanza más rápido que la bola.

#### IV. RESULTADOS

En los fotogramas de la Fig. 5 se observa que dejando caer simultáneamente una bola de madera y una barra del mismo material, esta última llega al piso primero, ambas partiendo con velocidad inicial nula.

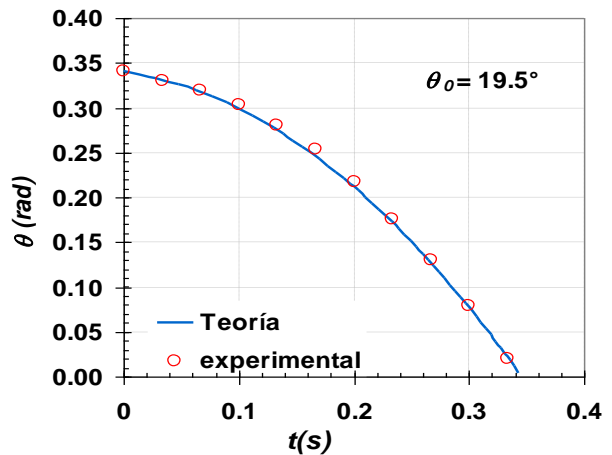
*Experimentos con objetos que caen con aceleración mayor que g*

En la Fig. 6 se muestran los resultados obtenidos al dejar caer una barra de  $L = 1,82\text{m}$  con un ángulo inicial  $\theta_0 \sim \pi/2$ .



**FIGURA 6.** El gráfico muestra como varía el ángulo que forma una barra de longitud  $L$  con el suelo cuando pivotea en un extremo con  $\theta_0 \sim \pi/2$ . La línea azul corresponde al modelo teórico y los puntos, a los datos experimentales.

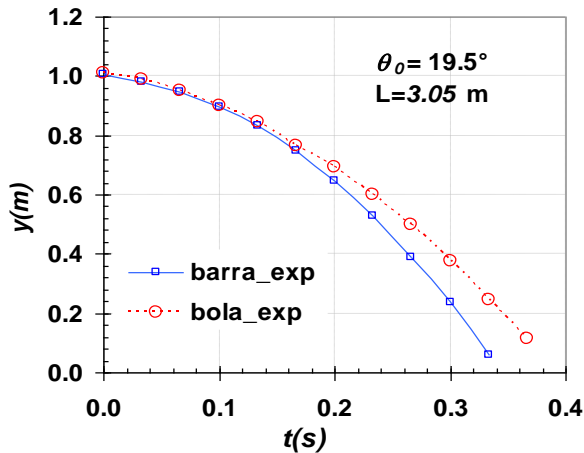
En las Figs. 6 y 7 se compara el movimiento de la barra con el correspondiente modelo teórico para dos ángulos iniciales distintos. En la Fig. 8 se muestran y comparan los datos del movimiento de la barra con los de una bola en caída libre.



**FIGURA 7.** Se compara el modelo teórico con los datos experimentales para una barra que cae con velocidad inicial nula y ángulo  $\theta_0 = 0,340$  ( $= 19.5^\circ$ ).

En todos estos casos se observa que el modelo teórico, Ec.(4) describe muy bien los datos experimentales.

En los fotogramas de la Fig. 5 y en el gráfico de la Fig. 8, se puede observar que la barra cae más rápido que la bola, tal como predice el modelo propuesto.



**FIGURA 8.** Los cuadrados (azules) corresponden a los datos experimentales de la barra y los círculos (rojos), al movimiento de la bola.

## V. CONCLUSIONES

Este trabajo ilustra la realización de un trabajo experimental accesible a estudiantes de nivel terciario y universitario de física básica. El trabajo muestra un efecto curioso y al mismo tiempo, es un desafío lograr explicarlo. El modelo teórico es simple, y aunque para poder comparar los resultados teóricos con los experimentales se requiere integrar numéricamente las ecuaciones, se utiliza un método simple que puede ser fácilmente realizado en cualquier hoja de cálculo.

Los materiales necesarios son de fácil adquisición y están disponibles en cualquier laboratorio escolar, y permiten aprovechar las ventajas de las TIC's para enseñar y aprender Física.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la lectura del manuscrito y las sugerencias realizadas por A. E. Schwint y Lic. Jorge Rubinstein. También a la Asociación Física Argentina por la asistencia otorgada a través del Proyecto INVOFI, que permitió para desarrollar este proyecto.

## REFERENCIAS

[1] Feynman, R., Leighton, R. y Sand, M., *The Feynman Lectures On Physics, Mecanica, Radiación Y Calor*, (Fondo Educativo Interamericano, México, 1971).  
 [2] Pozo, J. y Crespo, G. M., *Aprender y enseñar ciencia*, (Ed. Morata, Madrid, 1998).  
 [3] Young, W. M., *Faster than gravity!*, Am. J. Phys. **52**, 1142-1143 (1984).  
 [4] Theron, W. F. D., *The 'faster than gravity, demonstration revisited,*" Am. J. Phys. **56**, 736-739 (1988).

[5] Crawford, F. S., *Moments to remember*, Am. J. Phys. **57**, 105 y 177 (1989).  
 [6] Rod, C., *The fall and bounce of pencils and other elongated objects*, Am. J. Phys. **74**, 26-30 (2006).  
 [7] Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations, *Falling Faster than 'g'*, disponibles en <http://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/icb/icb.do> and [http://www.youtube.com/watch?v=BV7TPvk\\_kE](http://www.youtube.com/watch?v=BV7TPvk_kE) Consultados el 14/07/2011  
 [8] Franco, G. A., *Física con ordenador*, Universidad del País Vasco, Caída de una varilla inclinada, [http://www.sc.edu.es/sbweb/fisica/Introduccion/fisica/curso\\_fisica/fisica\\_intro.htm](http://www.sc.edu.es/sbweb/fisica/Introduccion/fisica/curso_fisica/fisica_intro.htm). Consultado el 20/06/2011  
 [9] Thornton, S. T. and Marion, J. B., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5a Edición, (Brooks/Cole, New York, 2004), Vol. 1, p. 153.  
 [10] *Física recreativa*, [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com). Consultado el 14/07/2011  
 [11] Logger Pro de Vernier, [www.vernier.com](http://www.vernier.com).  
 [12] Calderón, S., Nuñez, P. y Gil, S., *Cámara digital como instrumento de laboratorio. Estudio del tiro oblicuo*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 87-92 (2009)  
 [13] Phisics Tool Kit, disponible en <http://www.physicstoolkit.com/>. Consultado el 23/02/2011.  
 [14] Tracker, disponible en <http://www.dgeo.udec.cl/~andres/Tracker/>. Consultado el 23/02/2011.  
 [15] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., (Eds.), *Elliptic Integrals*, Ch. 17 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing, (Dover, New York, 1972), pp. 587-607.  
 [16] Elliptic Integral of the First Kind, Wolfram MathWork, disponible en <http://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegraloftheFirstKind.html>. Consultado el 14/07/2011.

## APÉNDICE A

### Tiempo de caída de la barra

Para calcular el tiempo de caída de la varilla, partimos de la Ec. (4) con  $\omega_0 = 0$ , es decir suponemos que la barra parte del reposo. Si expresamos esta ecuación en términos del ángulo  $\Theta = \theta + \pi/2$ , tenemos,

$$\omega(t) = \frac{d\Theta}{dt} = \sqrt{2}\omega_0 \sqrt{\cos\Theta - \cos\Theta_0}. \quad (15)$$

El tiempo de caída de la barra, desde el ángulo  $\Theta_0$  hasta  $\Theta = \pi/2$  se denota con  $T_1(\Theta_0)$  y viene dado por:

$$T_1(\Theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \omega_0} \int_{\Theta_0}^{\pi/2} d\Theta / \sqrt{\cos\Theta - \cos\Theta_0}. \quad (16)$$

Si utilizamos la relación  $\cos\Theta = 1 - 2\sin^2\Theta/2$  y hacemos la sustitución  $\sin\phi = \sin(\Theta/2) / \sin(\Theta_0/2)$ , tenemos:

$$T_1(\Theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \int_{\phi_0}^{\pi/2} d\phi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \quad (17)$$

donde  $k = \sin(\Theta_0 / 2)$  y  $\sin \phi_0 = 1/(\sqrt{2} k)$ . Esta expresión puede escribirse en términos de Integrales Elípticas Incompletas de Primera Especie [4]:

$$F(\phi_0, k) \equiv \int_0^{\phi_0} d\phi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \quad (18)$$

esto es:

$$T_1(\Theta_0) = T_1^0 [F(\pi/2, k) - F(\phi_0, k)]. \quad (19)$$

Existen tablas que dan los valores de estas funciones y programas que las calculan. [15, 16] Aquí hemos introducido la variable  $T_1^0 = 1/\omega_0 = \sqrt{2L/3g}$ .